Ebene Geometrie

für Schulen

von

Dr. Georg Recknagel,

Professor für Physik und Mathematik am k. Realgymnasium in München.

München.

Theodor Ackermann.

1871.

Druck von C. R. Schurich in München.

Vorrede.

Die mächtigsten Hilfsmittel einer Lehrmethode, durch welche ein zugleich dauerhafter und fruchtbarer Grund gelegt werden soll, sind natürliche Anordnung des Stoffes und Anregung der Selbstthätigkeit des Schülers.

Dadurch sind die leitenden Gesichtspunkte für die Bearbeitung eines Lehrbuches gegeben.

Wir halten es nicht für genügend, daß der Lehrer einen Satz nach dem andern wie einen Orakelspruch verkünde, ihn durch den Beweis vor jedem Zweifel schütze und dem Gedächtnisse des Schülers empfehle. Wir bemühen uns vielmehr, daß auch der Zusammenhang der Sätze nach ihrem Inhalte klar werde, daß ein behandeltes Thema sich abrunde, kurz, daß in der Schule die genetische Entwicklung und freie Untersuchung an die Stelle der starren Dogmatisirung gesetzt werde. Obwohl dabei stets die Thätigkeit des Lehrers in erste Linie treten wird, so muß doch auch das dem Unterrichte zu Grunde liegende Lehrbuch einen solchen Entwicklungsgang dadurch einhalten, daß jeder Satz in sich selbst, d. h. in seinem eigenen Inhalte, nicht nur im Beweise des folgenden, den Grund und die Berechtigung seiner Stellung trägt.

Nach diesem Principe einer pragmatischen Darstellung ist im vorliegenden Lehrbuche zunächst derjenige Theil des Lehrstoffes geordnet, den man allgemein für unumgänglich hält; es sind aber auch die übrigen Lehren, welche weniger zur Begründung des Folgenden, als zur Erweiterung unserer Kenntniß der gerade in Rede stehenden geometrischen Größe beitragen und gewöhnlich als Uebungsstoff bezeichnet werden, da eingereiht,

wo sie ihrem Inhalte nach am rechten Platze scheinen. Diese Sätze, unter denen sich manche für die Anwendung der Planimetrie sehr brauchbare befinden, sind durch kleineren Druck abgesondert, so daß man sie, wenn die Zeit zu eingehender Behandlung nicht ausreicht, oder letztere überflüssig erscheint, leicht ausscheiden und cursorisch durchnehmen, als Uebungen empfehlen oder auch ganz übergehen kann.

Da dieser Eintheilung zufolge der Lehrer um geeigneten Stoff zur sofortigen Einübung der einzelnen Hauptsätze und kleineren Abschnitte nirgends in Verlegenheit sein kann, so ist es vielleicht gerechtfertigt, daß die Constructions-Aufgaben in besonderen Anhängen beigefügt sind. Es scheint mir dadurch sowohl größere Gründlichkeit und Vielseitigkeit der Behandlung ermöglicht, als auch Gelegenheit zur Prüfung und Uebung der ganzen durch den vorausgehenden Unterricht gesammelten Kraft gegeben.

Im IV. Abschnitte des zweiten Theiles, welcher den pythagoreischen Lehrsatz und verwandte Sätze enthält, glaubte ich durch eine vorwiegend algebraische Darstellung sowohl größere Einfachheit zu erzielen, als auch auf die häufigste Art der Verwendung dieser Sätze Rücksicht zu nehmen.

Noch entschiedener möchte ich die Vorzüge der Rechnung in Bezug auf die Verwandlungs- und Theilungsaufgaben im Anhange II betonen. Die „rein geometrische" Verschränkung einer Aufgabe, welche durch Benützung der gegenwärtigen Hilfsmittel leicht und gemeinverständlich behandelt werden kann, dürfte nicht für eine glückliche Nachahmung der einfachen Klarheit des klassischen Alterthums zu halten sein.

Es ist deßhalb diesen Aufgaben eine Anleitung zur Construction algebraischer Ausdrücke vorausgeschickt, womit indessen nicht angedeutet sein soll, daß solche bei allen in dem Anhange enthaltenen Aufgaben nothwendig oder auch nur nützlich sei.

Obwohl ich auch sonst durchaus bestrebt war, mit den einfachsten Hilfsmitteln auszureichen, so glaubte ich deßhalb doch der Strenge des Beweises nirgends etwas vergeben zu dürfen. Es ist wohl zu bedenken, ob die durch Umgehung der Schwierigkeiten erschlichene Zeit für einen wirklichen Gewinn gehalten werden darf, und ob es nicht unrichtig ist, die äußerliche Abrichtung auf Kosten der inneren Bildung zu fördern! Jedenfalls ist es in den Fällen, wo man an dem Fassungsvermögen der Schüler zweifelt, besser, keinen Beweis zu geben, als einen unzureichenden.

Die Behandlung des Lehrstoffes im Einzelnen ist auf die Selbstthätigkeit des Schülers berechnet. Deßhalb sind Figuren nur spärlich beigegeben, und die Beweise nur da vollständig durchgeführt, wo sie zugleich wichtig und schwierig sind, oder als Muster dienen sollen. Im Uebrigen ist, wo es nöthig schien, der Gedankengang des Beweises angedeutet, oder es sind die Ordnungszahlen von Hilfssätzen citirt.

Zur Erleichterung des Nachschlagens ist am Schlusse ein Verzeichniß der citirten Sätze mit abgekürzter Angabe ihres Inhaltes angehängt.

Wie der Schüler sich auf den neuen Stoff vorbereitet, der bei der Lectüre eines Klassikers für die nächste Unterrichtsstunde in Aussicht genommen ist, wie man unbedingt von ihm verlangt, daß er die Bedeutung der einzelnen darin vorkommenden Wörter ermittelt und sich ernstlich bemüht habe, eine richtige Uebersetzung herzustellen; so müssen wir, wenn wir nicht weit hinter den Leistungen unserer Collegen zurückbleiben wollen, auch für das Studium der Geometrie auf der Vorbereitung des neuen Stoffes bestehen. Sobald nur die ersten Schwierigkeiten der Auffassung durch gemeinsame Arbeit überwunden sind, scheidet der Schüler selbst Voraussetzung und Behauptung des ihm vorher bezeichneten Satzes aus, entwirft sich die Figur, liest die als Hilfsmittel citirten Sätze nach und versucht Beweis oder Lösung

selbst zu finden. So wird er mit dem Gegenstande vertraut und wohl auch mit der Erwartung oder dem gehobenen Bewußtsein, selbst etwas Brauchbares gefunden zu haben, in die Schule kommen und mit doppeltem Interesse dem Unterrichte folgen, der die Aufgabe hat, das bereits Begonnene in exacter Weise abzuschließen. Diese Art der Behandlung wird im Anschlusse an das vorl. Lehrbuch passend von Nr. 29 an allmälig eingeleitet werden. Die Vorbereitung kann mündlich oder schriftlich sein. Die Schüler, welche die Aufgabe gelöst zu haben glauben, erhalten Gelegenheit zum Nachweise, insoweit dieses mit der Controle der Uebrigen vereinbar ist. Bei der endgiltigen Behandlung des Stoffes in der Schule wird von sämmtlichen Schülern schriftlich mitgearbeitet.

Da die auf Vorbereitung verwendete Zeit an der sonst zum „Studiren" (häufig Memoriren!) des schon behandelten Stoffes angesetzten abgehen kann, so wird ohne größere Ansprüche an die Zeit durch einigen Mehraufwand an Geduld und Beharrlichkeit, welche in den ersten Monaten von Seite des Lehrers und Schülers gefordert werden, ein Fortschritt erzielt, dem sehr bald auch ein namhafter Zeitgewinn und jener Zusammenhalt der Klasse folgt, welcher die Disciplin und die spätere Aufgabe leicht und ihre Behandlung lohnend macht. Einwände gegen diese Vorschläge sind mir nicht unbekannt, doch kenne ich keine Erfahrung, welche bei gutem Willen zur Durchführung auf unüberwindliche Schwierigkeiten oder gar auf Nachtheile geführt hätte.

Das Maß des Stoffes, der erfolgreich bewältigt wird, ist zwar zunächst durch die disponible Zeit gegeben, dabei aber doch so sehr von dem Grade der Entwicklung, der Zahl der Schüler und wohl auch von der mittleren Befähigung der einzelnen Klasse beeinflußt, daß schwer etwas Allgemeines darüber gesagt werden kann. Erforderlich ist eine Beschränkung und Auswahl im Anhang I, am leichtesten zulässig in den übrigen Anhängen, dann

in Nr. 53, 76, 78, 112, (162). Das auf harmonische Theilung Bezügliche in Nr. 173, 174, 175, 180, dann in 202—206 wird entweder vollständig durchzunehmen oder ganz zu übergehen sein.

Da an allen bayerischen Mittelschulen für den obersten Curs unter irgend einem Titel Zeit zur Wiederaufnahme der Planimetrie angesetzt ist, so kann manches früher aus irgend einem Grunde Uebergangene hierher verlegt werden. Dahin dürfte insbesondere der Anhang III, einige Aufgaben aus Anhang II und Nr. 162 und vielleicht auch schwierigere Constructionen des Anhang I passen. Auch einige Ausführungen in der Cyclometrie dürften mit Nutzen in dieser Zeit größerer Reife nachgeholt werden.

Was Einzelnes betrifft, so ist in der Parallelen-Theorie der Beweis des Euklidischen Grundsatzes (nach Bertrand 1778) durch Vergleichung des Winkelraumes mit dem Parallelstreifen gegeben. Ein auf Gründe eingehender Vorwurf gegen die Vollgiltigkeit dieses Beweises ist mir nicht bekannt. — Für 53 Nr. 7 ist der von Vielmayr in den Blättern f. d. bayr. Gymn. Schulwesen Bd. III S. 320 gegebene Beweis aufgenommen. — Unter den Aufgaben ist selbstverständlich keine, von welcher ich mich nicht selbst überzeugt hätte, daß sie durch die vorausgehenden Hilfsmittel lösbar ist. Viele derselben sind der reichhaltigen Sammlung von Burbach (O. Burbach, Grundriß der Planimetrie, Weimar 1868) entlehnt. Außerdem habe ich aus folgenden Werken besonderen Nutzen gezogen: Aschenborn, Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1862; Baltzer, die Elemente der Mathematik 2. Aufl. Leipzig 1867; Heis und Eschweiler, Lehrb. der Geometrie 3. Aufl. Köln 1860; Legendre, die Elemente der Geometrie, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Crelle, 2. Aufl. der Uebers., Berlin 1833; Spitz, Lehrb. der ebenen Geometrie 3. Aufl. Carlsruhe 1865; van Swinden,

Elemente der Geometrie, übers. und vermehrt von Jakobi. Jena 1834. Ziegler, Grundriß der ebenen Geometrie, Landshut 1870.

Vollständigere Ausführungen der Beweise und Lösungen der Aufgaben besonders drucken zu lassen, bin ich gerne erbötig, sobald mir von Seite einer größeren Anzahl von Collegen darauf bezügliche Wünsche zugehen.

Jeder Verbesserungsvorschlag in Bezug auf das Maß der gegebenen Hilfen, das ja offenbar nur Sache der Erfahrung sein kann, sowie überhaupt jede Kritik, welche sich mit dem Buche in irgend einer Beziehung eingehend beschäftigt, wird mich zum größten Danke verpflichten.

München, um Ostern 1871.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Seite

A. Vorbegriffe Nr. 1—9 1
B. Die gerade Linie Nr. 10—18 6

Planimetrie.

Erster Theil.

Congruenz.

I. Abschnitt. Gerade in der Ebene Nr. 19—37 10
II. Abschnitt. Vom Dreiecke Nr. 38—46 18
III. Abschnitt. Zwei Dreiecke Nr. 47—57 22
IV. Abschnitt. Vom Vierecke Nr. 58—79 31
V. Abschnitt. Vom Vielecke Nr. 80—88 42
VI. Abschnitt. Vom Kreise Nr. 89—122 44
Anhang I. Constructionen Nr. 123—136 65

Zweiter Theil.

Der Flächeninhalt der Figuren.

I. Abschnitt. Bestimmungsstücke der Größe Nr. 137—142 . . 94
II. Abschnitt. Verhältniß der Flächen Nr. 143—148 98
III. Abschnitt. Maß der Flächen Nr. 149—152 102
IV. Abschnitt. Beziehungen zwischen den Dimensionen eines Dreiecks und Anwendung derselben zur Berechnung der Flächen Nr. 153—162 105

Dritter Theil.

Die Form der Figuren.

I. Abschnitt. Proportionen zwischen Dimensionen der Figuren Nr. 163—180 115
II. Abschnitt. Die Form der Figuren Nr. 181—198 128
III. Abschnitt. Proportionen zwischen Strecken, welche von Kreisbögen begrenzt sind. Nr. 199—206 139
Anhang II. Constructionen. Verwandlungen. Theilungen Nr. 207 bis 217 143

Seite

Vierter Theil.
Eingeschriebene und umschriebene Polygone. Cyclometrie.

I. Abschnitt. Die linearen Dimensionen eingeschriebener und umschriebener Polygone Nr. 217—228 159
II. Abschnitt. Flächeninhalt eingeschriebener und umschriebener Polygone Nr. 229—233 166
III. Abschnitt. Cyclometrie Nr. 234—241 170
Anhang III. Isoperimetrische Sätze Nr. 242—256 178
Verzeichniß der citirten Sätze 186

Berichtigungen.

Seite 16 Zeile 10 von unten lies: (n—1) Parallelstreifen statt n Parallelstreifen.
Seite 40 Nr. 17 lies: Verbindungslinien statt Verbindungslinie.
Seite 48 Zus. 2 lies: Vergl. 54 Zus. 3 statt Vergl. 53.
Seite 54 Zeile 11 von oben lies: (nach 105) statt (nach 104).
Seite 56 Zeile 4 von oben lies: verschieden statt verschiedene.
Seite 79 Nr. 54 lies: Grundlinie, Verbindungslinie statt Grundlinien, Verbindungslinien.
Nr. 55 lies: Halbirungslinie statt Halbirungslinien.
Seite 101 Zeile 7 von unten lies: Verbindung statt Verbindungen.
Seite 104 Nr. 151 Zus. 2 lies: mit der halben Summe statt mit der Summe.
Seite 118 Zeile 2 von unten lies: CB statt BC.
Seite 123 Nr. 172 lies: Endpunkt statt Theilpunkt.
Seite 127 Zeile 2 von oben lies: YZ statt BC.
Seite 139 Zeile 7 von unten lies: demselben statt derselben.

Einleitung.

A. Vorbegriffe.

1. Erklärung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von dem im Raume Ausgedehnten.

2. Erklärungen.

Ein vollständig begrenzter Theil des Raumes heißt Körper.

Unsere Vorstellung von einem geometrischen Körper unterscheidet sich von der eines physischen Körpers hauptsächlich dadurch, daß wir uns den geometrischen als stetig den Raum erfüllend denken, während wir durch die Erfahrung angewiesen sind, die physischen Körper als Aggregate diskreter d. h. durch Zwischenräume getrennter Massentheilchen anzusehen. Bei der Vorstellung eines geom. Körpers sehen wir von dem Stoffe, aus welchem er etwa bestehen mag, ganz ab. Gegenstand der Geometrie.

Die Grenze des Körpers (gegen einen andern Körper, oder den übrigen, unbegrenzten Raum) heißt Fläche.

Für die Vorstellung einer Fläche, die nicht Grenze (Oberfläche) eines Körpers wäre, gibt uns die Erfahrung keinen Anhaltspunkt. Doch pflegt man in der Geometrie auch an Flächen zu denken, ohne sich den Körper, den sie begrenzen, zugleich vorzustellen, d. h. man abstrahirt von dem Körper.

Die Grenze zweier Flächen heißt Linie; die Grenze zweier Linien ist ein Punkt.

Es läßt sich der Punkt auch unabhängig von der Linie denken als einzelne Stelle im Raume; die Linie unabhängig von der Fläche als Spur eines bewegten Punktes; Die Fläche als Spur einer bewegten Linie; der Körper als Spur einer bewegten Fläche.

Wenn man im Raume drei Hauptrichtungen der Aus-

dehnung annimmt, von oben nach unten (Höhe), von links nach rechts (Breite oder Länge), von vorn nach hinten (Dicke, Tiefe), so kommt dem Körper Ausdehnung in jeder der drei Richtungen zu, der Fläche nur in zwei (sie ist ohne Dicke), der Linie in einer (Länge), während der Punkt keine Ausdehnung besitzt.

Als allgemeinste Bezeichnung für einen Gegenstand der Geometrie wird im folgenden der Ausdruck „geometrisches Gebilde" gebraucht.

Geometrische Größen, welche Ausdehnung in gleichviel Hauptrichtungen besitzen, heißen gleichartig. Nur gleichartige Größen können miteinander in Bezug auf Größe verglichen werden. Es besteht eine Linie nicht aus Punkten, eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen.

3. Erklärungen.

Man kann in der Geometrie einen rein theoretischen von einem angewandten Theile unterscheiden. — Im theoretischen Methode der Geometrie. Theile werden die Eigenschaften der geometrischen Gebilde entwickelt, im angewandten Theile wird die gewonnene Erkenntniß benützt, um Aufgaben zu lösen, die entweder Herstellung (Construction) geometrischer Gebilde von verlangten Eigenschaften oder Berechnung unbekannter Größen aus (durch Messung) gegebenen Größen zum Ziele haben.

Die geometrische Wissenschaft verlangt somit zu dem Wissen noch ein Können; eines wird durch das andere gefördert, erweitert und befestigt.

Die Lehren der Geometrie werden in Form einzelner Sätze vorgetragen, von welchen Worterklärungen oder Definitionen die ersten sein und jedesmal da wieder auftreten müssen, wo ein neuer Gegenstand in die Betrachtung eingeführt wird. Einige wenige Sätze, welche mehr als bloße Worterklärungen sind, indem sie den geometrischen Größen gewisse Eigenschaften beilegen, werden als unmittelbar klar und unbestreitbar (in den Grundformen unseres Vorstellungs- und Denkvermögens unmittelbar begründet) angenommen und heißen Grundsätze oder Axiome. Ueber den Grundsätzen erhebt sich ein System von Lehrsätzen, d. h. Sätzen, in welchen die durch Verbindung der Grundsätze mit den Definitionen erschlossenen Eigenschaften der

$$A = C$$
$$B = C$$

folgt $A = B$. Beweis durch Substitution von B für C.

6. Erklärungen.

Addition zweier geometrischen Größen kann in doppeltem Sinne verstanden werden, entweder geometrisch, als Zusammensetzung von zwei geometrischen Größen zu einer solchen Größe, oder arithmetisch als Addition der Zahlen (Maßzahlen), welche ausdrücken, wie oft eine dritte als Einheit angenommene Größe in beiden enthalten ist. Rechnung mit geom. Größen.

Ebenso kann die Multiplikation einer geometrischen Größe mit einer Zahl in doppeltem Sinne aufgefaßt werden.

Die Subtraction kann man sich als ein Abtrennen eines Theiles vom Ganzen oder als Subtraktion von Maßzahlen denken.

Bei der Division geometrischer Größen sind zwei Fälle denkbar, indem man durch Division entweder die Frage beantwortet, wie oft ist die Größe B in A enthalten (wie viel Theile kann man aus A machen, wenn jeder die Größe von B haben soll), oder indem man die Größe des n^{ten} Theiles von A ermittelt. In beiden Fällen kann sich die Vorstellung sowohl auf die geometrischen Größen selbst, als auf ihre Maßzahlen beziehen.

7. Lehrsätze.

Wenn man auf beiden Seiten einer zwischen zwei geometrischen Größen bestehenden Gleichung gleiche geometrische Größen addirt oder subtrahirt, so erhält man eine richtige Gleichung. Behandlung von Gleichungen zwischen geom. Größen.

Ist $A = B$ u. $C = D$, so gilt

$$A \pm C = B \pm D$$

Multiplizirt oder dividirt man die beiden Seiten einer zwischen zwei geometrischen Größen bestehenden Gleichung mit der nämlichen Zahl, oder dividirt beide Seiten durch zwei gleiche und den beiden ersten gleichartige geometrische Größen, so entstehen richtige Gleichungen. Ist $A = B$, die Zahl $m = n$, ferner $C = D$, und C u. D mit A u. B gleichartig, so gilt:

$$mA = nB,$$
$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n},$$
$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

Die Begründung dieser Sätze folgt aus der Substitutionsfähigkeit gleicher Größen.

8. Lehrsätze.

Behandlung von Ungleichungen.

Nimmt man mit beiden Seiten einer Ungleichung gleiche Veränderungen in dem eben (7) erörterten Sinne vor, so bleibt der Sinn der Ungleichung erhalten.

Subtrahirt man eine Ungleichung von einer Gleichung, so erhält man eine Ungleichung von entgegengesetztem Sinne. Ebenso, wenn eine Gleichung durch eine Ungleichung dividirt wird. Wenn $A = B$, $C < D$, so ist

$$A - C > B - D \text{ und}$$

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{D}.$$

Addirt oder multiplizirt man zwei Ungleichungen von gleichem Sinn, so erhält man eine Ungleichung von demselben Sinne.

Subtrahirt man eine Ungleichung von einer Ungleichung, die den entgegengesetzten Sinn hat, so erhält man eine Ungleichung im Sinne des Minuenden. Analog bei der Division.

Ist $A > B$ u. $C > D$, $m > n$, so ist:

$$A + C > B + D,$$

$$m A > n B,$$

$$A - D > B - C,$$

$$\frac{A}{D} > \frac{B}{C},$$

$$\frac{A}{n} > \frac{B}{m}.$$

9. Erklärung.

Das Ganze u. seine Theile.

Eine geometrische Größe A ist ein Theil der ihr gleichartigen geometrischen Größe B, wenn jeder in A angenommene Punkt zugleich ein Punkt in B ist, dabei aber in B Punkte angenommen werden können, welche dem A nicht angehören.

Grundsatz. Das Ganze ist größer als ein Theil desselben. Die Summe der Theile ist dem Ganzen gleich.

B. Die gerade Linie.

10. Erklärungen.

Gerade, gebrochen, krumm.

Der Begriff der geraden Linie muß als elementar voraus gesetzt werden. Eine Linie, welche nicht gerade, aber aus geraden

Linien zusammengesetzt ist, heißt gebrochen. Ist kein Theil einer Linie gerade, so heißt sie krumm (Curve).

11. Erklärungen.

Die gerade Linie kann in zweifacher Beziehung betrachtet werden; a) bezüglich ihrer Lage, b) bezüglich ihrer Größe (Länge). Gerade. Strahl. Strecke.

Soll eine gerade Linie ohne Endpunkte, also unbegrenzt gedacht, oder von ihrer Begrenzung (Größe) abgesehen werden, so wird sie im Folgenden schlechthin Gerade genannt; soll sie von einem Punkte aus ins Unbegrenzte gehend gedacht werden, oder sieht man von einem zweiten Grenzpunkte ab, so nennen wir sie Strahl; denkt man sie von zwei Punkten begrenzt, so heißt sie Strecke.

12. Grundsatz.

Die Lage einer geraden Linie ist durch zwei Punkte bestimmt, Grundsatz von der Lage. durch welche sie gehen soll. Oder: zwei Gerade, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, sind nicht verschieden. Man bezeichnet eine Gerade durch Aneinanderreihen von zwei Buchstaben, (des großen lateinischen Alphabets) die zur Bezeichnung von zwei beliebigen Punkten derselben dienen.

13. Erklärungen.

Unter Richtung von einem Punkte 1 nach einem Punkte Richtung. 2 versteht man den von 1 über 2 ins Unendliche gehenden Strahl. Von einem dritten Punkte sagt man „er liegt in dieser Richtung," wenn er in dem eben definirten Strahle liegt. Man bezeichnet einen Strahl mit 2 (großen) Buchstaben, von denen der erste am Ausgangspunkte, der zweite in irgend einem Punkte des Strahles steht.

14. Erklärung.

Erfüllen alle Punkte, welche man in einer Linie (oder Geometrischer Ort. Fläche) annehmen mag, eine gewisse Bedingung, so heißt die Linie (oder Fläche) der geometrische Ort jener Punkte.

Beispiele. Die durch die Punkte 1 und 2 gezogene Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, welche mit 1 und 2 in gerader Linie liegen. Der von 1 über 2 gehende Strahl ist der geometrische Ort aller Punkte, welche in der Richtung von 1 nach 2 liegen.

15. Grundsatz.

Die gerade Linie ist die kürzeste Linie, welche zwischen Grundsatz von der Größe. zwei Punkten liegen kann.

16. Lehrsatz.

Die Größe einer geraden Linie ist durch ihre Endpunkte bestimmt, d. h. alle geraden Linien, welche die nämlichen Endpunkte haben, sind gleich groß.

Beweis indirect durch 15.

Zusatz. Zwei Strecken, welche die nämlichen Endpunkte haben, können nicht mehr von einander unterschieden werden (16 u. 12).

Anmerkung. Die zwischen zwei Punkten liegende gerade Linie ist das Maß für die Entfernung der beiden Punkte. Man bezeichnet eine Strecke mit den 2 (großen) Buchstaben, welche an ihren Endpunkten stehen.

17. Erklärung.

Vergleichung von Strecken.

Will man zwei Strecken hinsichtlich ihrer Größe vergleichen, so legt man sie mit den Anfangspunkten aufeinander und in die nämliche Richtung, dann sind sie gleich, wenn auch die Endpunkte zusammenfallen (16). Außerdem ist diejenige die größere, zwischen deren Anfangs- und Endpunkt der Endpunkt der anderen Strecke fällt (9).

Umgekehrt: kennt man das allgemeine Größenverhältniß zweier Strecken, so ist nach Herstellung der vorhin angegebenen Lage der Strecken ein Schluß auf die gegenseitige Lage ihrer Endpunkte zulässig.

Zusatz. Gleich große Strecken sind congruent.

Messen.

Anmerkung 1. Eine eingehendere Vergleichung zweier Strecken findet dadurch statt, daß man beide mißt, d. h. (durch wiederholtes Auflegen) untersucht, wie oft eine dritte (als Einheit angenommene) Strecke in beiden enthalten ist (aufgetragen werden kann).

Man ist übereingekommen, als Einheit zur Messung von Strecken eine Strecke zu nehmen, welche $1/40.000.000$ des Erdmeridians ist und Meter (métre, metrum) genannt wird. Das Meter wird zur Vermeidung der Brüche bei Messung kleinerer Strecken in 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter getheilt (decima, centesima, millesima pars metri). Eine Strecke von 10 Metern heißt Decameter, 100 Meter geben ein Hectometer, 1000 Meter ein Kilometer, 10000 Meter ein Myriameter (δέκα, ἑκατόν, χίλια, μύρια μέτρα).

Als ältere Längen-Maße sind zu nennen: der Fuß, welcher in 12 Zoll = 144 Linien getheilt ist, und in verschiedenen Ländern verschieden lang angenommen wird. So ist z. B.

der bayerische Fuß = 0,291859 Meter
der preußische Fuß = 0,313853 „
der englische Fuß = 0,304794 „
der pariser Fuß = 0,324839 „

Die Ruthe = 12 Fuß, die Klafter (Lachter beim Bergbau) = 6 Fuß, die Toise (zur Ableitung des Meters verwendet) = 6 pariser Fuß, der Faden (fathom) = 6 englische Fuß, die Elle (yard) sehr verschieden, zwischen $1^1/_2$ und 3 Fuß. Die geographische oder deutsche Meile, definirt als der (360.15^te) 5400^te Theil des Aequators. Die englische Seemeile = 1852 Meter.

Anmerkung 2. Linien, die ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen commensurabel, solche, die kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen incommensurabel.

In jedem besonderen Falle wird es in Folge der Beschränktheit unserer Sinne eine Grenze der erkennbaren Unterschiede geben, und insoferne läßt sich immer eine ganze Zahl angeben, welche sagt, wie oft eine (kleine) Länge in einer gegebenen Länge enthalten ist. Wird z. B. in einem besonderen Falle 0,1 Millimeter als die kleinste noch unterscheidbare Länge angenommen, so werden die gemessenen Längen als ganzzahlige Vielfache von Decimillimetern ausgedrückt erscheinen, weil etwa vorhandene Unterschiede, die weniger als 0,1^mm betragen, nicht mehr wahrgenommen werden. Das Resultat praktischer Messung wird also stets sein, daß die gemessenen Längen als ganze Vielfache irgend einer (kleinen) Länge ausgedrückt sind, demnach auch als Vielfache von einander ausgedrückt werden können, d. h. ein gemeinschaftliches Maß haben. Theoretisch ist diese Annahme jedoch nicht zulässig, d. h. es darf im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden, daß 2 Strecken ein gemeinschaftliches (wenn auch noch so kleines) Maß haben, und es wird sich in der That häufig genug ergeben, daß das Verhältniß zweier Linien nicht durch eine (endliche) Zahl genau angebbar ist. Incommensurabel.

18. Erklärungen.

Ebene Fläche oder Ebene heißt eine Fläche, welche jede Strecke, die ihre zwei Endpunkte in der Fläche hat, vollständig enthält. Ebene.

Ein vollständig begrenzter Theil der Ebene heißt eine (ebene) Figur. Figur.

Anmerkung. Figur heißt auch jede durch Zeichnung auf einer Fläche versuchte Darstellung eines geometrischen Gebildes. Diese letzteren Figuren sollen nur das Vorstellungsvermögen in der Auffassung der dargestellten Gebilde unterstützen und sind nicht selbst Objekte der Geometrie.

Planimetrie.

Erster Theil.

Congruenz.

I. Abschnitt.

Gerade in der Ebene.

19. Erklärung.

Die Planimetrie ist jener Theil der Geometrie, welcher sich auf die Betrachtung von Linien und Figuren beschränkt, die in einer Ebene liegen. Werden in Zukunft geometrische Größen mit einander in Beziehung gebracht, so wird stets vorausgesetzt, daß sie in einer Ebene liegen.

20. Erklärung.

Zwei in einer Ebene liegende Gerade haben entweder einen Punkt gemeinschaftlich oder keinen (12). Im ersteren Falle sagt man von den Geraden sie schneiden sich, und der gemeinschaftliche Punkt heißt ihr Schnittpunkt. Von dem Schnittpunkte zweier Geraden gehen vier Strahlen ins Unendliche; von zwei Strahlen, die von dem nämlichen Punkte ausgehen und derselben Geraden angehören, sagt man, sie haben entgegengesetzte Richtung.

Schnittpunkt.

entgegengesetzte Richtung.

21. Erklärungen.

Winkel.

Beschränkt man die Betrachtung auf zwei dieser vier Strahlen, so ist deutlich, daß man den einen derselben um ihren gemeinschaftlichen Ausgangspunkt drehen kann, bis er in die Lage des andern kommt. Die Größe dieser Drehung heißt der Winkel, den die beiden Strahlen miteinander bilden. Der gemeinschaftliche Punkt heißt Scheitel, die Strahlen selbst Schenkel des Winkels. Von der Länge der Schenkel eines Winkels kann demgemäß überhaupt nicht die Rede sein.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch drei Buchstaben, von denen zwei Bezeichnungen beliebiger Punkte der beiden Schenkel, der mittlere aber der Buchstabe am Scheitel ist, oder durch einen zwischen die Schenkel eingeschriebenen (kleinen griechischen) Buchstaben, oder auch durch den Buchstaben am Scheitel allein,

wenn dieser Scheitel nur einem einzigen Winkel angehört. Zuweilen erscheint es passend, der Bezeichnung noch das Zeichen $\sphericalangle$ (Winkel) vorauszusetzen.

Zwei Strahlen bilden zwei Winkel mit einander, einen hohlen (concaven) und einen erhabenen (convexen), welcher letztere erhalten wird, wenn man den Strahl so dreht, daß er bei der Drehung einmal durch die ihm entgegengesetzte Lage geht. Den convexen Winkel kann man mit denselben 3 Buchstaben bezeichnen wie den concaven, wenn man im ersteren Falle einen Bogen darüber setzt. Z. B. BAC (concav), $\overset{\frown}{BAC}$ (convex).

Der zwischen den Schenkeln eines Winkels enthaltene unbegrenzte Ausschnitt der Ebene heißt Winkelraum. Winkelraum.

22. Erklärungen.

Der Erklärung in Nr. 21 gemäß müssen wir Winkel für gleich halten, welche durch gleich große Drehungen des beweglich gedachten Schenkels um den Scheitel entstehen, und denjenigen Winkel für den größeren, welcher durch eine größere Drehung entsteht. Um hierüber entscheiden und also Winkel ihrer Größe nach miteinander vergleichen zu können, legt man sie so aufeinander, daß die Scheitel aufeinander und ein Paar Schenkel in die nämliche Richtung fallen. Fallen dann auch die beiden andern Schenkel in die nämliche Richtung, so sind die Winkel gleich; außerdem ist derjenige Winkel der größere, zwischen dessen beide Schenkel der zweite Schenkel des andern Winkels fällt. Umgekehrt: Kennt man das allgemeine Größenverhältniß der Winkel, so ist nach Herstellung der eben vorgeschriebenen Lage ein Schluß auf die relative Lage der zweiten Schenkel zulässig. Gleiche Winkel sind demnach congruent. Vergleichung von Winkeln bez. der Größe.

23. Erklärungen.

Das einfachste Maß der Winkel ist nach dem Bisherigen die ganze Umdrehung, welche ein Strahl vollendet hat, wenn er durch stetige Drehung in gleichem Sinne in seine Anfangslage zurückgekehrt ist. Maß der Winkel.

Die halbe Umdrehung hat ein Strahl vollendet, wenn er die seiner ursprünglichen Richtung entgegengesetzte Lage einnimmt. Der durch die halbe Umdrehung gemessene Winkel heißt

ein gestreckter Winkel. Die beiden Schenkel des gestreckten Winkels liegen in einer Geraden.

Die Hälfte des gestreckten Winkels (also $\frac{1}{4}$ Umdrehung) heißt ein rechter Winkel (R). Nach 22 sind alle rechten, ebenso wie alle gestreckten Winkel selbstverständlich einander gleich.

Der rechte Winkel ist als Maß der Winkel angenommen. Man hat ihn zur Vermeidung der Brüche in kleinere Theile getheilt, so daß der 90te Theil des R ein Grad, der 60te Theil des Grades eine Minute, der 60te Theil einer Minute eine Sekunde heißt. $1\,R = 89^0\ 59'\ 60''$.

Von geraden Linien, die einen rechten Winkel miteinander bilden, sagt man, sie stehen aufeinander senkrecht. Der Punkt, in welchem eine Senkrechte die andere trifft, heißt der Fußpunkt der Senkrechten.

Aufgaben. α) Wie viele Sekunden hat ein R?

β) Wie viele Grade, Minuten, Sekunden sind $\frac{5}{12}$ R, $\frac{3}{16}$ R, $\frac{7}{11}$ R?

γ) Wie viel R sind 60^0, $22^0\ 30'$, $14^0\ 3'\ 45''$, $88^0\ 7'\ 20''$?

Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heißt spitz, der größer ist als ein rechter, stumpf. Zwei Winkel, deren Summe einen rechten beträgt, heißen in Bezug auf einander Complemente oder complementär. Zwei Winkel, deren Summe 2 R beträgt, heißen in Bezug auf einander Supplemente oder supplementär.

Complemente. Supplemente.

24. Lehrsatz.

Winkel, welche gleiche Complemente oder Supplemente haben, sind gleich. Beweis durch 5 und 7.

25. Lehrsatz.

Vergleichung von Winkelräumen.

Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Winkelräume. Ist der Winkel α n mal so groß als der Winkel β, so ist auch der zum Winkel α gehörige Winkelraum n mal so groß als der zum Winkel β gehörige.

Beweis. Theilt man den Winkel in n gleiche Theile, so zerlegt sich auch der Winkelraum in n congruente Theile.

26. Erklärung.

Nebenwinkel.

Nebenwinkel heißen zwei Winkel, welche einen gemein-

schaftlichen Scheitel und Schenkel haben, und deren beide anderen Schenkel in gerader Linie liegen.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt zwei R (9). Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, sind sie verschieden, so ist der eine spitz, der andere stumpf.

Aufgaben. Die Winkel α u. β sind Nebenwinkel. Wie groß ist α, wenn 1) β um 30^0 (n^0) kleiner (größer) als ein R ist; wenn 2) $\beta = \frac{7}{6}$R, $= \frac{m}{p}$R ist?

Zusatz 1. Besitzen zwei Winkel, welche keinen Theil gemeinsam haben, einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel, und ihre Summe beträgt 2 R, so liegen ihre äußersten Schenkel in einer Geraden.

Beweis indirect.

Zusatz 2. Die Summe einer beliebigen Anzahl von Winkeln, die denselben Scheitel und keinen Theil gemeinschaftlich haben, beträgt 2 R, wenn ihre äußersten Schenkel in einer Geraden liegen, und umgekehrt (9).

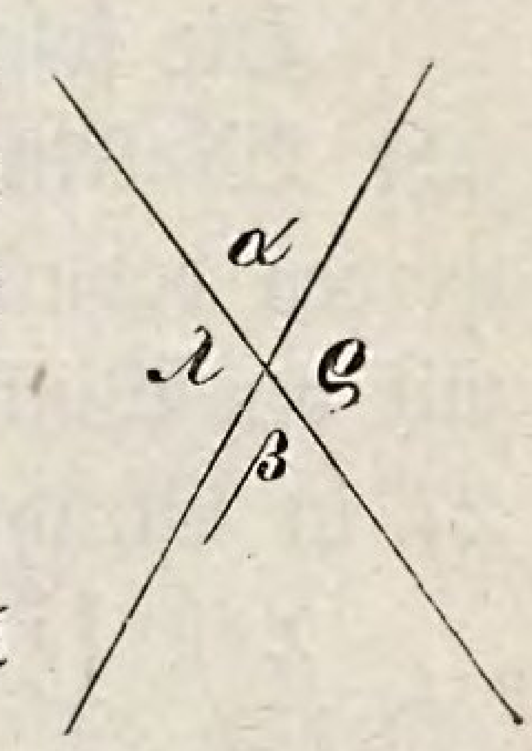
Zusatz 3. Bildet von allen in der Ebene möglichen Winkeln, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, keiner ganz oder theilweise einen Theil des anderen, so beträgt ihre Summe 4 R.

Lehrsätze. α) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

β) Stehen die Halbirungslinien zweier Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel, aber keinen Theil gemeinsam haben, auf einander senkrecht, so sind diese beiden Winkel Nebenwinkel.

27. Erklärung.

Scheitelwinkel heißen zwei Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und so liegen, daß die Schenkel des einen Winkels Verlängerungen der Schenkel des anderen Winkels sind. Scheitelwinkel.



Lehrsatz. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Die Scheitelwinkel α und β haben den nämlichen Nebenwinkel (λ oder ϱ), also gleiche Supplemente, daher ist 24 anwendbar.

Beweise auch $\lambda = \varrho$.

Lehrsatz. Die Gerade, die einen Winkel theilt, theilt auch seinen Scheitelwinkel.

28. Erklärungen.

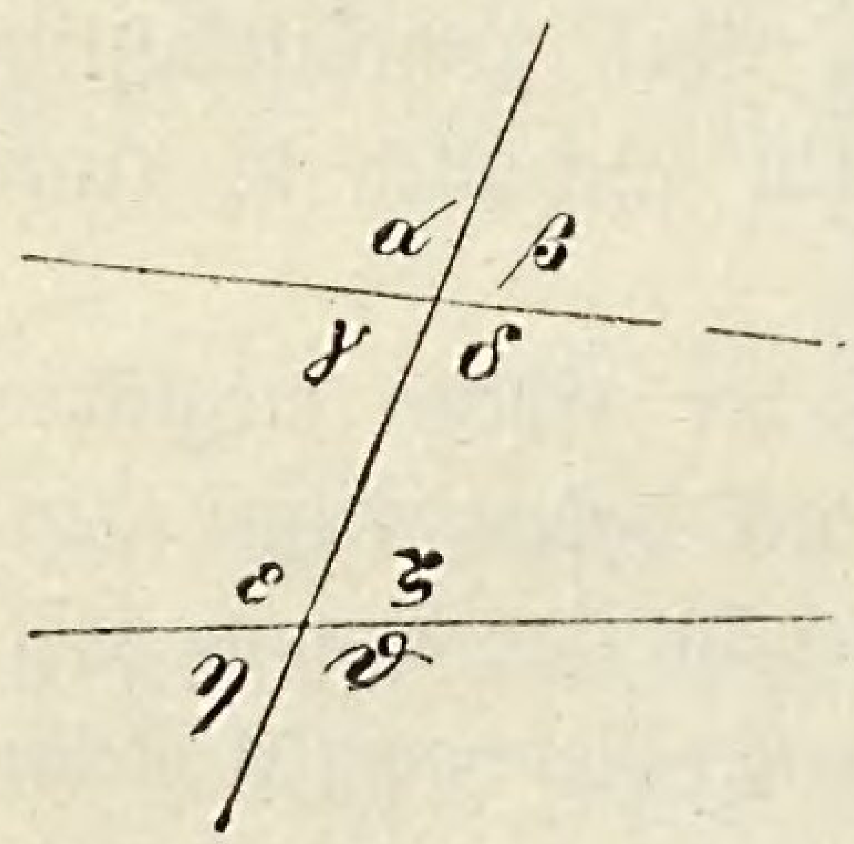
Parallel. Gerade Linien, die beliebig verlängert, keinen Punkt gemeinschaftlich haben, heißen **parallel**. Um auszudrücken, daß die Gerade AB der CD parallel sei, schreibt man AB || CD.

convergent, divergent. Strecken und Strahlen können möglicherweise keinen Schnittpunkt haben, ohne deshalb parallel zu sein. Sie sind dann nach einer Richtung hin **convergent**, nach der entgegengesetzten **divergent**.

Parallelstreifen. Der zwischen zwei parallelen Geraden liegende Theil der Ebene heißt **Parallelstreifen**.

29. Erklärungen.

Wechselwinkel, correspondirende u. Gegenwinkel. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so bildet die Schneidende mit den geschnittenen Geraden acht Winkel, vier innere und vier äußere. Je zwei dieser Winkel **von verschiedenem Scheitel** haben besondere Benennungen erhalten, es heißen nämlich:



1) **Wechselwinkel** zwei innere oder zwei äußere Winkel, welche auf verschiedenen (**wechselnden**) Seiten der Schneidenden liegen. Somit α zu ϑ, β zu η (äußere Wechselwinkel); γ zu ζ, δ zu ε (innere Wechselwinkel).

2) **Correspondirende Winkel** je ein innerer und ein äußerer, die auf derselben Seite der Schneidenden liegen. Somit α zu ε, β zu ζ, γ zu η, δ zu ϑ.

3) **Gegenwinkel** zwei innere oder zwei äußere Winkel, die auf derselben Seite der Schneidenden liegen. Somit α und η, β und ϑ (äußere Gegenwinkel); γ und ε, δ und ζ (innere Gegenwinkel).

Jeder der acht Winkel hat einen Wechselwinkel, einen correspondirenden und einen Gegenwinkel.

Die folgenden Sätze enthalten die zwischen den genannten acht Winkeln bestehenden Beziehungen. Die Beweise derselben werden dadurch geführt, daß man die Winkel der Voraussetzung mit den Winkeln der Behauptung durch Anwendung von 26 oder 27 in Gleichung bringt, dann durch 4 oder 5 abschließt.

Lehrsätze. 1) Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel gleich, so ist jeder Winkel seinem Wechselwinkel gleich.

2) Ist ein Winkel seinem correspondirenden gleich, so ist jeder Winkel seinem correspondirenden gleich.

3) Ist die Summe zweier Gegenwinkel 2 R, so ist die Summe von jedem Paare Gegenwinkel 2 R.

4) Sind zwei Wechselwinkel ungleich, so ist kein Winkel seinem Wechselwinkel gleich.

5 u. 6) Analogie für correspondirende und Gegenwinkel.

7) Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel gleich, so ist er auch seinem correspondirenden gleich und mit seinem Gegenwinkel zusammen 2 R.

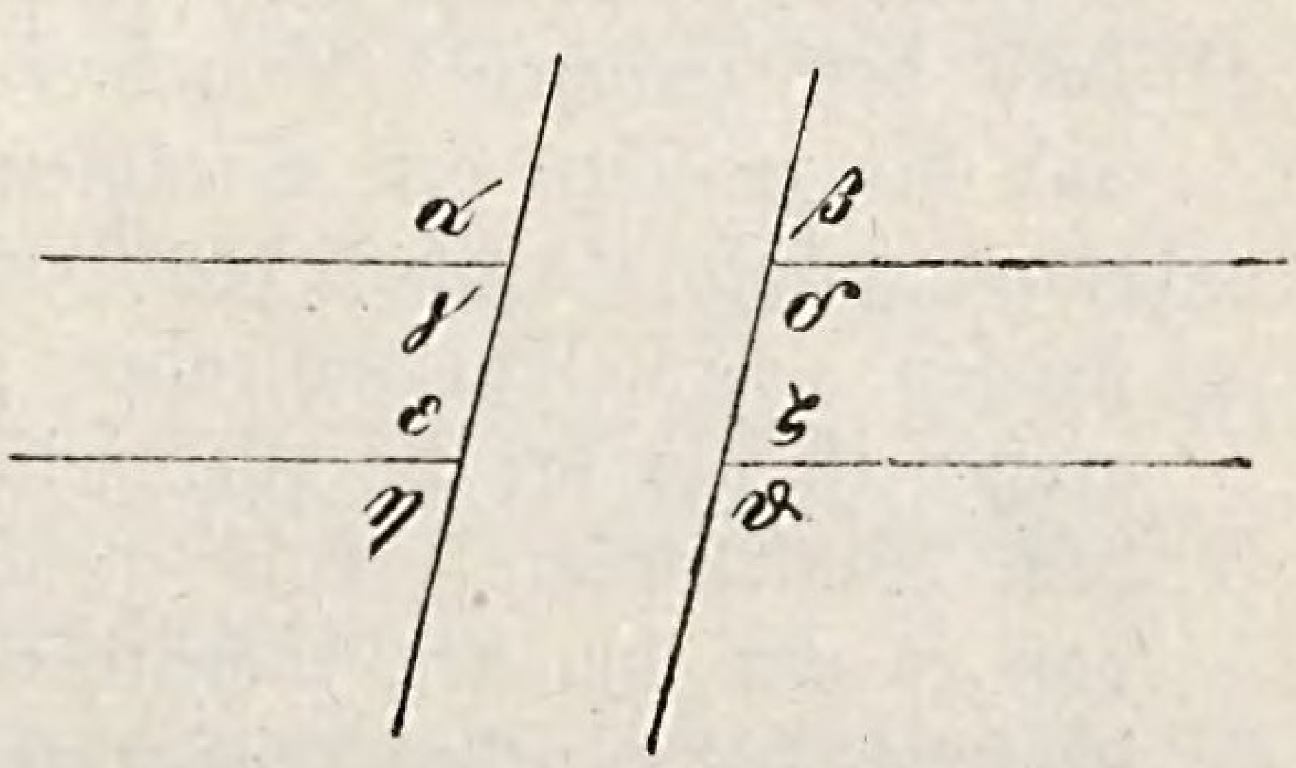
8 u. 9) Die beiden Umkehrungen von 7.

10) Sind zwei Wechselwinkel ungleich, so sind auch die correspondirenden ungleich, und die Summe von jedem Paar Gegenwinkel kleiner oder größer als 2 R.

11 u. 12) Umkehrungen von 10.

30. Lehrsatz. Parallelen-Theorie.

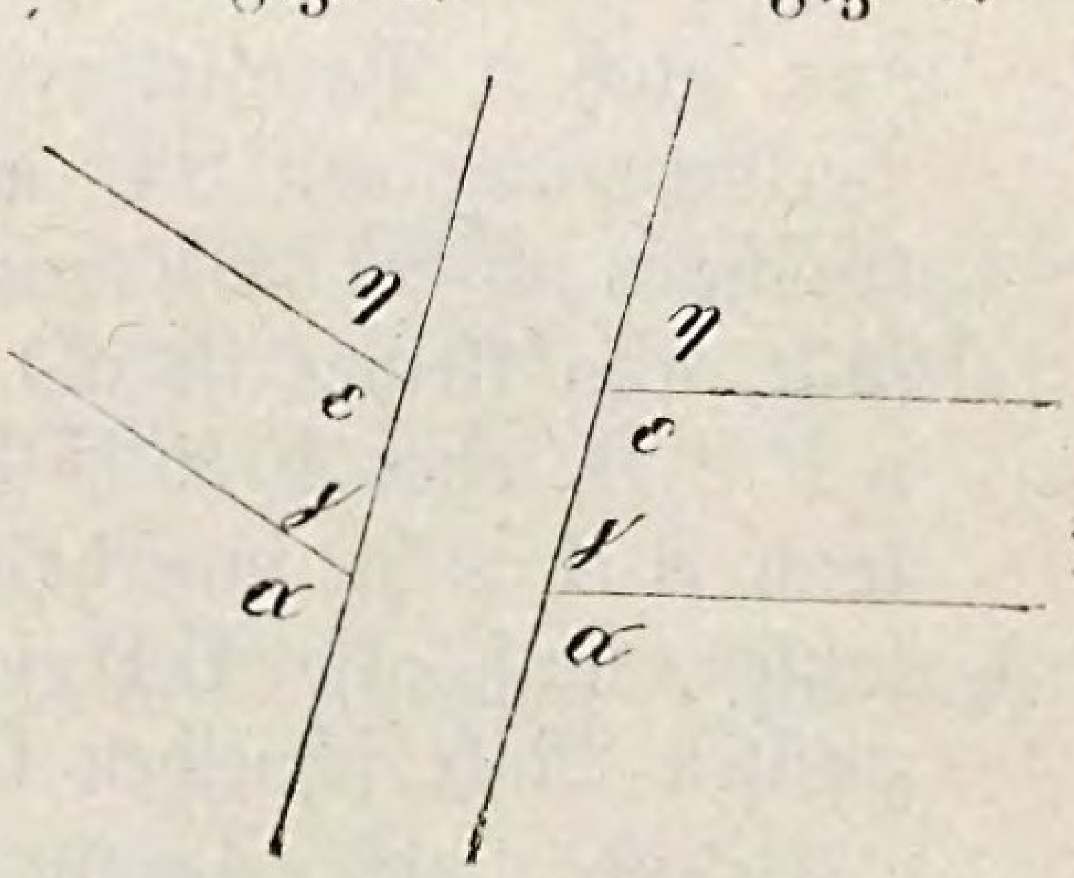
Fig. 1.



Ist die Summe von einem Paare Gegenwinkel 2 R, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Beweis. Zieht man aus der Voraussetzung den Schluß, daß die Wechselwinkel gleich sind, so läßt sich zeigen, daß diejenigen beiden Seiten des vorliegenden geometrischen Gebildes, welche durch Trennung desselben längs der Schneidenden (Fig. I) entstehen, congruent sind. Es gelingt dieses durch Umkehrung der einen (linken) Seite (Fig. 2), durch Drehen derselben um die Schneidende (Fig. 3) und Aufeinanderlegen mit Anwendung von 22 und 17.

Fig. 2. Fig. 3.



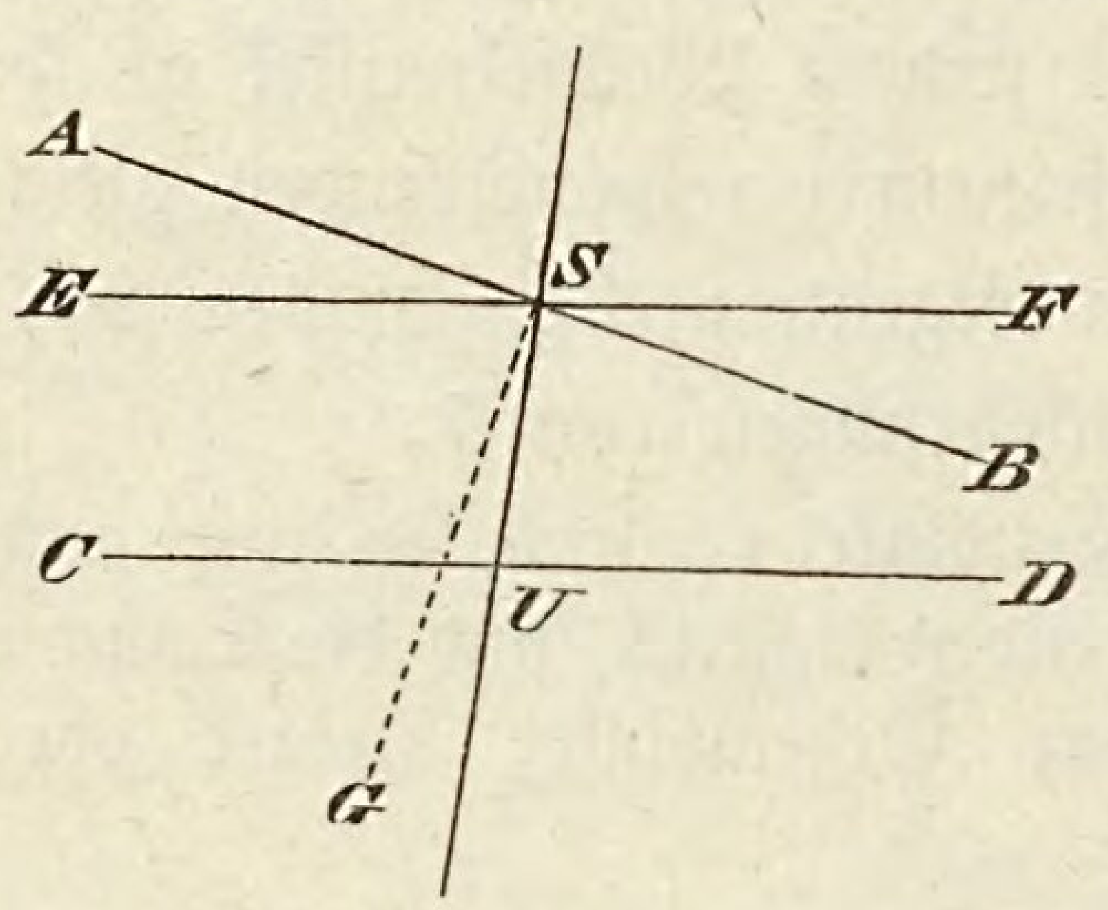
Würden also die Geschnittenen einen Punkt auf der einen Seite der Schneidenden gemeinschaftlich haben, so müßten sie auch auf der andern Seite einen solchen gemein-

schaftlich haben, also sich in zwei Punkten schneiden, was unmöglich ist.

Zusatz. Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel oder correspondirenden gleich, so sind die Geschnittenen parallel.

31. Lehrsatz.

Ist die Summe von einem Paare innerer Gegenwinkel kleiner als 2 R, so schneiden sich die geschnittenen Geraden auf der Seite der Schneidenden, wo dieses Winkelpaar liegt.



Beweis. Sind A B u. C D die Geschnittenen, S u. U die Schnittpunkte und die rechts von der Schneidenden gelegenen Winkel B S U + S U D < 2 R, so denke man sich durch S eine Gerade E F so gezogen, daß Winkel U S F seinem Wechselwinkel S U C gleich wird, dann ist S F ‖ C D nach 30 Z., und da wegen U S F + S U D = 2 R und U S B + S U D < 2 R, Winkel U S F > Winkel U S B, so verliefe der Strahl S B, wenn er die C D nicht schnitte, innerhalb des zwischen S F und U D enthaltenen Parallelstreifens, und der zwischen den Strahlen S F und S B enthaltene Winkelraum müßte als Theil des Ganzen kleiner sein, als der Parallelstreifen. Es läßt sich aber zeigen, daß dieser Winkelraum größer ist als der Parallelstreifen. Dann legt man einen zweiten dem Winkelraume F S B gleichen Winkelraum so neben diesen, daß er mit ihm den Scheitel S und den Schenkel S B gemeinschaftlich hat, neben diesen einen dritten Winkelraum von der Größe F S B, und setzt dieses Verfahren fort, bis der letzte Schenkel S G der entstandenen Winkelsumme über S U hinaus fällt, so ist F S G > F S U und wenn n Winkelräume von der Größe F S B nöthig waren, F S G = n . F S B. Trägt man nun auch n Parallelstreifen von der Größe F S U D an die Verlängerung von S U an, so entsteht ein Parallelstreifen von der Größe n . F S U D, welcher den Winkelraum F S U nicht ausfüllt, also kleiner ist als dieser. Umsomehr ist n F S U D < n F S B, oder F S U D < F S B, w. z. b. war. Deßhalb kann S B nicht innerhalb des Parallelstreifens F S U D verlaufen, muß also U D schneiden, weil es S F u. S U nicht zum zweiten Male schneiden kann.

Zusatz. Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel oder correspondirenden ungleich, so schneiden sich die geschnittenen Geraden.

32. Lehrsatz.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so ist die Summe von einem Paare innerer Gegenwinkel 2 R.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 31, dann 26, 7, 8, 31.

Zusatz. Sind zwei Gerade parallel, so sind die von ihnen mit einer dritten Geraden gebildeten Winkel ihren Wechselwinkeln und korrespondirenden gleich.

33. Lehrsatz.

Schneiden sich zwei Gerade auf einer Seite einer dritten Geraden, so sind die auf dieser Seite liegenden inneren Gegenwinkel zusammen kleiner als 2 R.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 30, dann 26, 7, 8, 31.

Zusatz. Schneiden sich zwei Gerade, so ist kein Winkel, den eine dritte Gerade mit denselben bildet, seinem Wechselwinkel oder korrespondirenden gleich.

34. Lehrsatz.

Durch einen Punkt kann man zu einer gegebenen Geraden nur eine parallele Gerade ziehen.

Beweis indirekt durch 32, 5, 7, 22 oder direkt, indem man durch 32 Zus. u. 22 zeigt, daß eine beliebig durch den Punkt gezogene Gerade unter der Voraussetzung des Parallelismus mit der schon gezogenen Parallelen zusammenfällt.

Anmerkung. Die letztere hier angedeutete Beweisart läßt sich öfter statt des indirekten Beweises verwenden. Vgl. 26 Z. 1 und 37 a.

35. Lehrsatz.

Eine Gerade, welche die eine von zwei parallelen Geraden schneidet, schneidet auch die andere.

Beweis indirekt durch 28 und 34.

Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel beziehungsweise parallel, so sind die Winkel entweder gleich oder supplementär. Man unterscheide die 3 möglichen Fälle!

36. Lehrsatz.

Sind zwei Grade einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis indirekt durch 20 u. 35; oder direkt durch 32 Z., 5 u. 30 Z.

37. Lehrsatz.

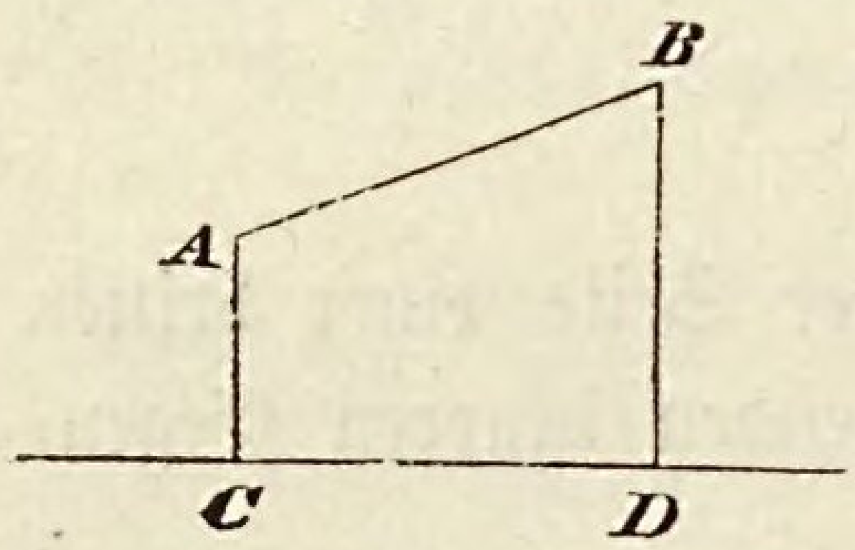
Senkrechte. Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden nur eine senkrechte Gerade, der Punkt mag

a) in der Geraden, oder

b) außerhalb der Geraden liegen.

Beweis zu a) durch 23, 22; oder indirekt durch 23, 9.

zu b) direkt durch 33, oder indirekt durch 30.



Anmerkung. Der Fußpunkt C der Senkrechten, welche von einem Punkte (A) auf eine Gerade gefällt ist, heißt die (senkrechte oder orthogonale) Projektion des Punktes (A) auf die Gerade. Die Strecke auf der Geraden C D, welche von den Projektionen der Punkte A u. B begrenzt wird, heißt die (senkrechte oder orthogonale) Projektion der Strecke AB auf die Gerade CD. Die Senkrechten AC, BD heißen Projicirende.

Lehrsätze. α) Stehen zwei Gerade auf einer dritten Geraden senkrecht, so sind die zwei Geraden parallel.

β) Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so auch die andere.

II. Abschnitt.

Vom Dreiecke.

38. Erklärung.

Werden zwei sich schneidende Gerade außerhalb ihres Durchschnittspunktes von einer dritten Geraden geschnitten, so begrenzen die drei Geraden eine ebene Figur, Dreieck genannt.

Die drei Schnittpunkte der Geraden heißen Ecken, die von den Eckpunkten begrenzten Strecken heißen Seiten des Dreiecks. Die Summe der Seiten heißt Umfang.

Hat man irgend eine Seite des Dreiecks zur Grundlinie gewählt, so heißt die von dem gegenüberliegenden Ecke aus auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällte Senkrechte die Höhe des Dreiecks.

Durch die Höhe werden zwei Seiten des Dreiecks auf die dritte projicirt.

Eine zwei beliebige Punkte des Umfangs verbindende Strecke, die nicht mit einer Seite zusammenfällt, heißt **Transversale**.

39. Lehrsatz.

Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen. Beziehung zwischen den Seiten.

Beweis durch 15 und 8.

Lehrsätze. α) Zieht man von einem beliebigen innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte aus gerade Linien nach den Endpunkten einer Seite, so ist die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten. Beweis. Man verlängert eine der Strecken bis zum Umfange und wendet 15 an.

β) Die Summe der drei Strecken, die von einem Punkte innerhalb des Dreiecks nach den drei Ecken laufen, ist kleiner als der Umfang und größer als der halbe Umfang des Dreiecks.

40. Erklärung.

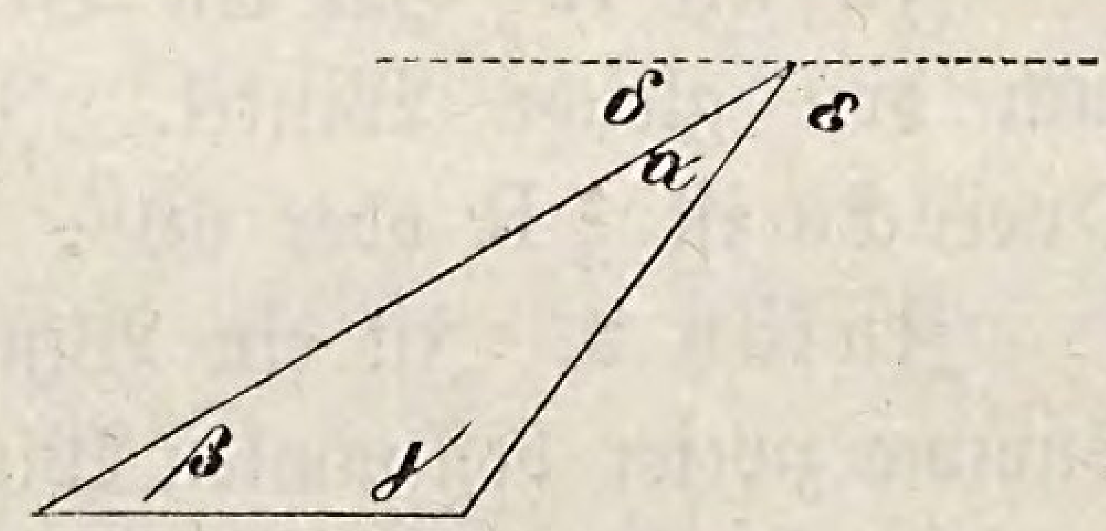
Unter dem **Außenwinkel** eines Dreiecks versteht man denjenigen Winkel, welchen eine Dreiecksseite mit der Verlängerung einer anderen bildet.

Lehrsatz. Der Außenwinkel ist der Summe der ihm gegenüberliegenden inneren Winkel des Dreiecks gleich. Außenwinkel.

Beweis. Der Außenwinkel wird durch eine zur gegenüberliegenden Seite parallele Gerade in zwei den inneren Winkeln nach 32 Z. beziehungsweise gleiche Theile getheilt.

41. Lehrsatz.

Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt 2 R. Beziehung zwischen den Winkeln.



Beweis durch 40, oder durch eine Parallele und 32 Z., 26 Zus. 2.

Zusatz. Kennt man zwei Winkel eines Dreieckes oder deren Summe, so ist auch die Größe des dritten Winkels bekannt.

Lehrsätze. α) Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks ist 4 R.

β) Theilt man einen Winkel des Dreiecks durch eine Gerade, so schneidet diese die gegenüber-

liegende Seite des Dreiecks. Zum Beweise wird 31 zweimal angewendet.

γ) Zieht man von einem beliebig im Umfange oder innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte aus Gerade nach den Endpunkten einer Seite, so ist der von denselben gebildete Winkel größer als der Winkel, den die beiden anderen Dreiecksseiten einschließen.

42. Folgerungen aus 41 und Erklärungen.

Ein Dreieck kann nur einen rechten oder stumpfen Winkel haben. Im ersteren Falle heißt es rechtwinklig, im zweiten stumpfwinklig. Die im rechtwinkligen Dreiecke dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt Hypotenuse, die beiden anliegenden Seiten heißen Katheten ($\varkappa\acute{\alpha}\vartheta\varepsilon\tau o\iota$). Die beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks geben zusammen einen R, die des stumpfwinkligen weniger als einen R.

43. Erklärung.

Das gleichschenklige Dreieck.

Ein Dreieck, welches zwei gleichlange Seiten hat, heißt gleichschenklig. Die gleichen Seiten heißen Schenkel, die dritte Seite Grundlinie (Basis) des Dreiecks.

Die Winkel an der Grundlinie.

Lehrsatz. Hat ein Dreieck zwei gleich lange Seiten, so sind auch die Winkel gleich, welche diesen Seiten gegenüberliegen (die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich).

Beweis. Man denke sich den Winkel an der Spitze halbirt und drehe den einen Theil der Figur um die Halbirungslinie, so läßt sich die Congruenz der fraglichen Winkel direkt erweisen. 22, 17, 16 Z.

Zusatz 1. Hat ein Dreieck drei gleiche Seiten, so hat es auch drei gleiche Winkel. Jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks ist $\frac{2}{3}$ R oder 60^0.

Zusatz 2. Ist ein Winkel, oder ein Außenwinkel oder die Summe zweier bestimmten Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks gegeben, so sind alle Winkel des Dreiecks bestimmt.

Zusatz 3. Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind spitz.

Aufgaben. α) Ein Winkel an der Grundlinie ist 60^0; $42^0\ 11'\ 2{,}4''$; n^0; wie groß sind die übrigen?

β) Der Winkel an der Spitze ist 60^0; 102^0 $45' 11''$; n^0; wie groß sind die übrigen?

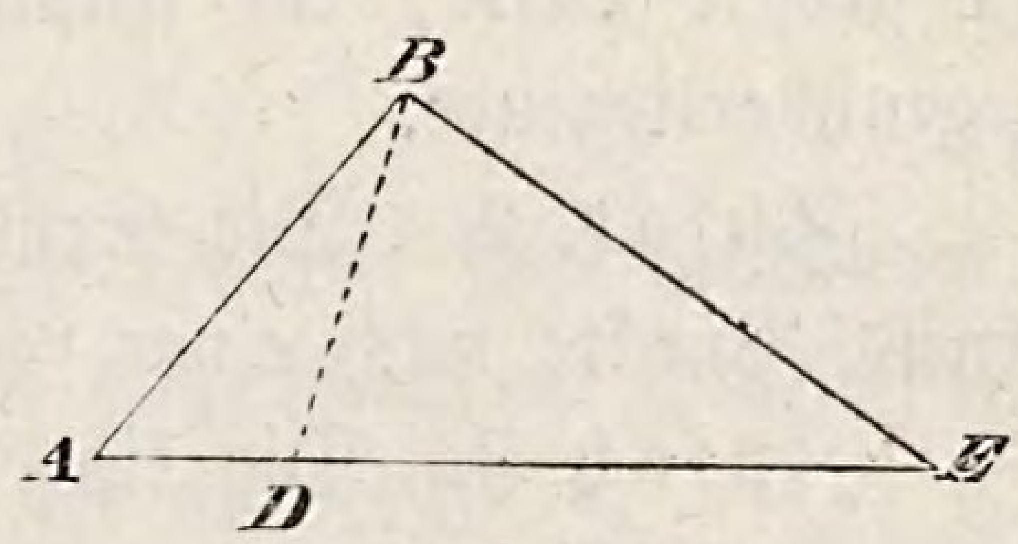
γ) Der Außenwinkel an der Spitze hat 179^0 $30'$; n^0; wie groß sind die inneren Winkel?

δ) Die Summe aus dem Winkel an der Spitze und einem Basiswinkel beträgt 115^0, wie groß sind die drei Winkel?

44. Lehrsatz.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks ungleich, so liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Zwei Seiten ungleich.

Beweis. Man trägt die kleinere Seite E B auf der größeren E A ab, und zieht B D,



so ist $\sphericalangle$ E B D = $\sphericalangle$ E D B, da nun $\sphericalangle$ E D B > $\sphericalangle$ A, (40) so ist auch

$$\sphericalangle EBD > \sphericalangle A,$$

$$\text{um so mehr } \sphericalangle EBD + ABD > \sphericalangle A$$

$$\text{oder } \sphericalangle ABE > \sphericalangle A$$

Um wieviel (welche Winkel der Figur) ist der größere Winkel größer als der kleinere?

Man beantwortet diese Frage durch folgenden Beweisgang:

$$EDB = A + ABD,$$

$$\text{somit } EBD = A + ABD$$

$$EBD + ABD = A + 2.\,ABD$$

$$ABE = A + 2.\,ABD.$$

Zusatz. Ein Winkel, der nicht der größten Seite eines Dreiecks gegenüberliegt, ist spitz.

Beweis direkt durch 43 Zus. 3, oder indirekt durch 44 u. 42.

45. Lehrsatz.

Sind zwei Winkel eines Dreiecks gleich, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich. Zwei Winkel gleich.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 44.

Zusatz. Sind die drei Winkel eines Dreiecks gleich groß, so ist es gleichseitig.

Lehrsätze. a) Halbirt man den Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, so ist die Halbirungslinie der Grundlinie parallel.

b) Zieht man durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Parallele zur Basis, so halbirt diese den Außenwinkel.

46. Lehrsatz.

Zwei Winkel ungleich.

Sind zwei Winkel eines Dreiecks ungleich, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 43 und 44 oder direkt, indem man von dem größeren Winkel einen Theil gleich dem kleineren abschneidet und 45 und 15 anwendet.

Zusatz 1. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse die größte Seite, im stumpfwinkligen die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende.

Zusatz 2. Die Senkrechte ist die kürzeste Linie, die von einem Punkte nach einer Geraden gezogen werden kann.

Zusatz 3. Die kürzeste Linie, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, steht auf der Geraden senkrecht.

Beweis indirect: Die Annahme der Unrichtigkeit des Satzes würde bei Anwendung von Zus. 2 auf eine neue Senkrechte gegen die Voraussetzung verstoßen.

Anmerkung. Die von einem Punkte auf eine Gerade gezogene Senkrechte ist das Maß für den Abstand des Punktes von der Geraden.

Lehrsatz. Die Halbirungslinie eines Winkels im Dreiecke theilt die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte, von denen jeder kleiner ist, als die anliegende Dreiecksseite.

III. Abschnitt.

Zwei Dreiecke.

47.

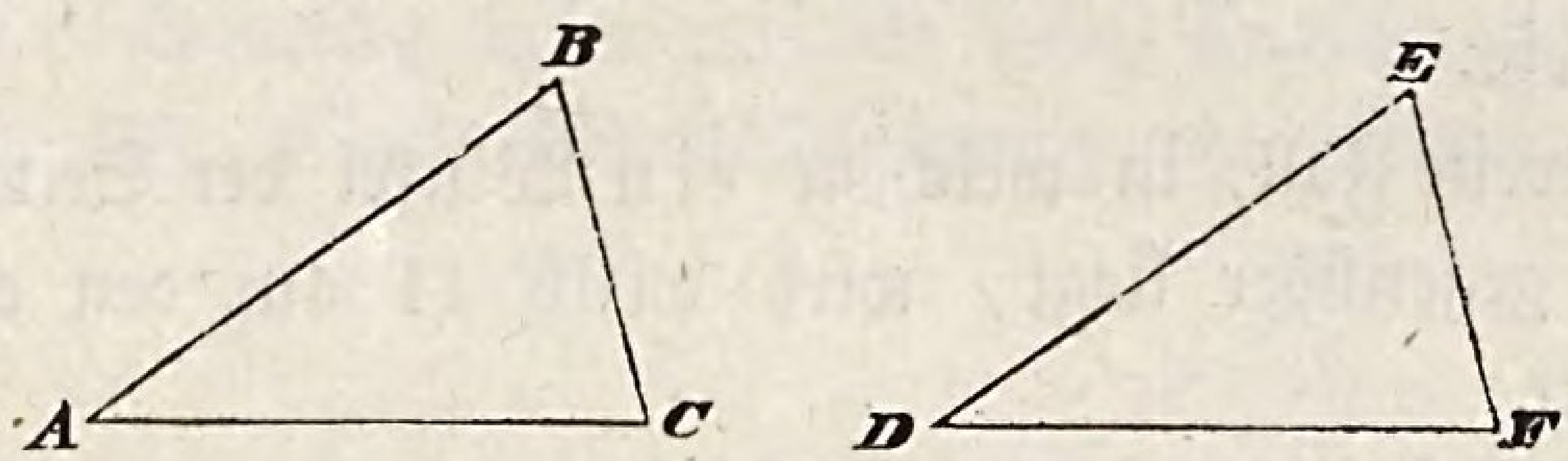
Allgemeines über Bestimmung eines Dreiecks.

Man erkennt schon aus dem zweiten Abschnitte, daß die sechs Merkmale eines Dreiecks, 3 Seiten und 3 Winkel, nicht von einander unabhängig sind, so daß 3 beliebige Strecken und 3 beliebige Winkel nicht immer zugleich einem Dreiecke angehören, selbst wenn bei der Auswahl derselben schon auf 39 und 41 Rücksicht genommen ist. Man sieht z. B. sofort, daß bei einer bestimmten Größe von zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel nicht

mehr willkürlich sind, sondern nothwendig eine ganz bestimmte Größe und Lage erhalten. Es entsteht daraus allgemein die Frage: Durch wie viele und welche seiner sechs Merkmale ist ein Dreieck vollkommen bestimmt? Oder, was dasselbe ist: Welche Merkmale müssen in zwei Dreiecken gleich sein, damit auch die übrigen nicht mehr von einander abweichen, die Dreiecke also abgesehen von ihrer Lage überhaupt nicht mehr von einander unterschieden werden können? Diejenigen Sätze, welche die Bedingungen angeben, deren Erfüllung uns von der Identität (Congruenz) zweier Dreiecke überzeugt, heißen Congruenzfälle (Kriterien, Erkennungsmittel der Congruenz).

48. Lehrsatz.

(Erster Congruenzfall). Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen Dreiecke so groß sind, wie im anderen. Congruenzfälle I.



Voraussetzung $\sphericalangle A = \sphericalangle D$,
$AB = DE$,
$AC = DF$.

Behauptung $\triangle ABC \cong DEF$.

Beweis. Man lege Dreieck DEF so auf ABC, daß die Scheitel D u. A der als gleich bekannten Winkel aufeinander fallen. Sorgt man noch dafür, daß DF in die Richtung von AC fällt, so liegt $\triangle$ DEF fest und kann in keinem andern Stücke mehr dem Dreiecke ABC angepaßt werden.

Es fällt aber nun, wegen $DF = AC$, der Endpunkt F auf C (17).

Ferner fällt wegen $\sphericalangle D = \sphericalangle A$ und Erfüllung der übrigen in Nr. 22 vorgeschriebenen Bedingungen DE in die Richtung von AB.

Endlich fällt wegen $DE = AB$ und Erfüllung der übrigen in 17 vorgeschriebenen Bedingungen der Endpunkt E auf B.

Da nun auch die Strecken FE und CB mit ihren End-

punkten auf einander liegen, können sie nicht mehr von einander unterschieden werden (16), und die beiden Dreiecke decken sich vollständig.

Da man demnach die beiden Dreiecke, (durch das eben gezeigte Verfahren) so aufeinander legen kann, daß sie den nämlichen Theil der Ebene ausfüllen, daß also jeder Punkt im einen Dreiecke zugleich ein Punkt im andern ist, so sind sie congruent.

49. Lehrsatz.

II. (Zweiter Congruenzfall). Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und zwei bezüglich dieser Seite gleichliegende Winkel im einen Dreiecke so groß sind wie im anderen.

Beweis. Von den beiden hiebei möglichen Fällen wird der erstere, in welchem die zwei Winkel der Seite anliegen, durch Aufeinanderlegen bewiesen nach dem Muster in 48 mit Hilfe von 17, 22, 22, 20; oder indem man nach Anwendung von 17, 22 die der Congruenz nachtheiligen Lagen des dritten Eckes mittelst 22 ausschließt.

Der zweite Fall, in welchem ein Winkel der Seite an-, der andere ihr gegenüber liegt, wird durch 41 auf den ersten Fall zurückgeführt.

Anmerkung. Fällt man im rechtwinkligen Dreiecke aus dem Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so hat man drei Dreiecke, von welchen jedes mit dem anderen eine Seite gemeinschaftlich und die drei Winkel gleich hat, dennoch sind diese Dreiecke im Allgemeinen nicht congruent. Warum?

50. Lehrsatz.

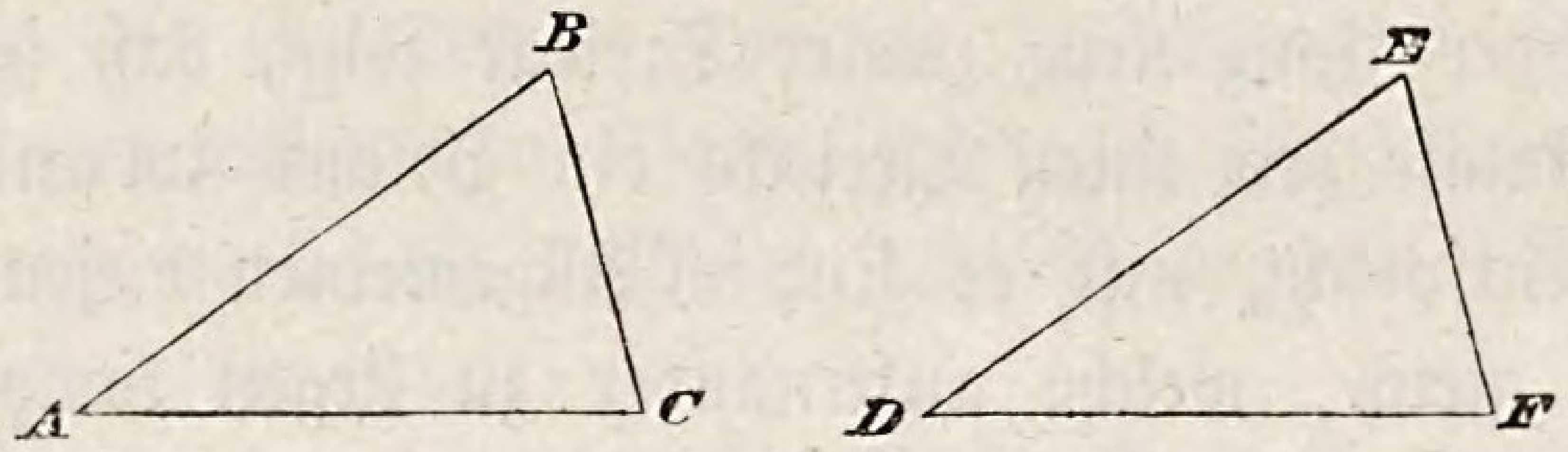
III. (Dritter Congruenzfall). Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des anderen einzeln gleich sind.

Beweis. Man denkt sich die zwei Dreiecke mit ihren größten Seiten aneinander gelegt und zieht die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecken. Dann läßt sich der Fall nach zweimaliger Anwendung von 43 mittelst 7 auf den ersten Congruenzfall zurückführen.

Anmerkung. Denkt man sich die Dreiecke nicht mit den größten Seiten aneinander gelegt, so wird der Beweis weniger einfach.

51. Lehrsatz.

(Vierter Congruenzfall). Zwei Dreiecke sind congruent, IV.
wenn zwei Seiten und der der einen von diesen Seiten gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreiecke so groß sind wie im anderen, und wenn zugleich die den beiden anderen gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel nicht supplementär sind.*)



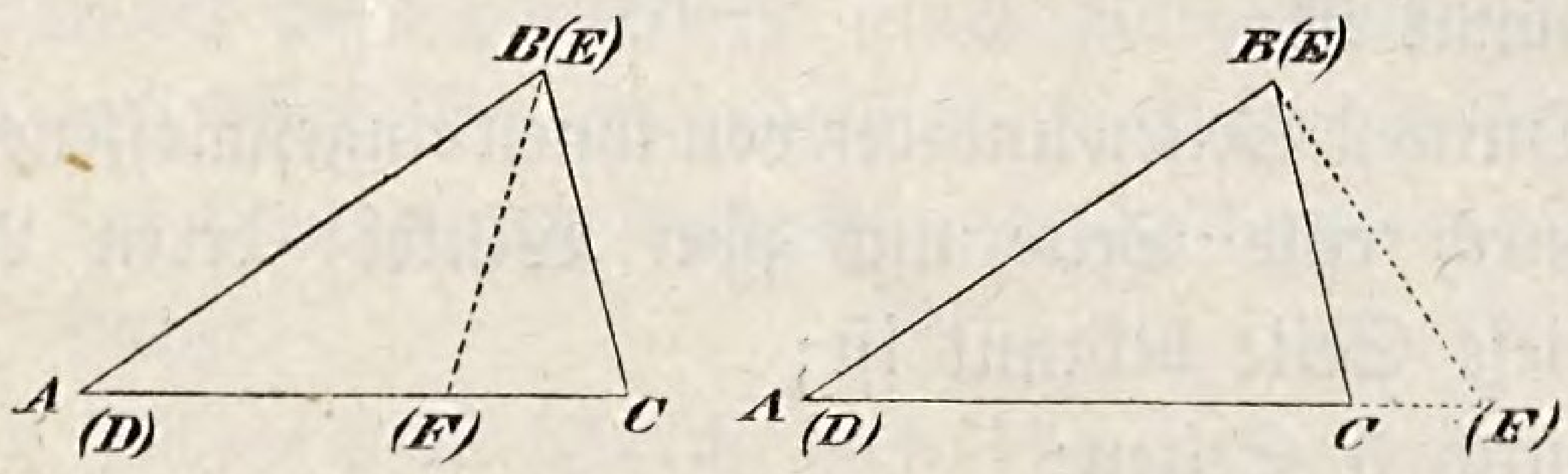
Voraussetzung: $AB = DE$,

$BC = EF$,

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$,

$\sphericalangle C + F \lesseqgtr 2R$.

Beweis. a. Durch Aufeinanderlegen: Die Congruenz des dritten Eckpunktes wird indirekt durch Ausschließung erwiesen mittelst 43, 26, 4 und Berücksichtigung der vierten Bedingung;



b. Durch Aneinanderlegen, wobei zwei mögliche Lagen zu unterscheiden sind. 43. 7. 45. 50.

Zusatz 1. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der der größeren von beiden gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreiecke so groß sind wie im anderen.

Beweis durch 44 Z. auf den Lehrsatz zurückgeführt.

Zusatz 2. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und eine Kathete im einen Dreiecke so groß sind wie im anderen.

Anmerkung 1. Zieht man im gleichschenkligen Dreiecke eine Transversale von der Spitze nach einem beliebigen Punkte der Grundlinie, so erfüllen die entstandenen Dreiecke die ersten 3 Bedingungen des vierten Congruenzfalles, ohne im Allgemeinen congruent zu sein.

Anmerkung 2. Man soll den im Zus. 1 vorgetragenen

---

*) Wären diese Winkel Rechte, so fände die Congruenz nach II statt.

Satz nicht an die Stelle des allgemeineren Lehrsatzes setzen, denn es gibt Fälle, in welchen die Congruenz stattfindet, wenn 2 Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel übereinstimmen, z. B. in dem Beweise des Lehrsatzes:

Halbirt eine Transversale zugleich eine Seite und einen Winkel des Dreiecks, so ist dieses gleichschenklig.

Schlüsse aus der Congruenz.

52. Allgemeine Bemerkungen zu den Congruenzfällen.

a) Aus der Congruenz zweier Dreiecke folgt, daß jedem der 6 Merkmale des einen Dreiecks ein gleiches im anderen Dreiecke entspricht, und es sind im Allgemeinen diejenigen Merkmale gleich, welche aufeinander zu liegen kommen. Vergleicht man die einzelnen Congruenzfälle, so bemerkt man, daß diejenigen Merkmale sich decken, welche den als gleich bekannten Stücken gegenüberliegen. Hat man also die Congruenz zweier Dreiecke bewiesen, so ist der Schluß erlaubt, daß diejenigen Stücke einander gleich sind, welche den als gleich bekannten Stücken gegenüberliegen.

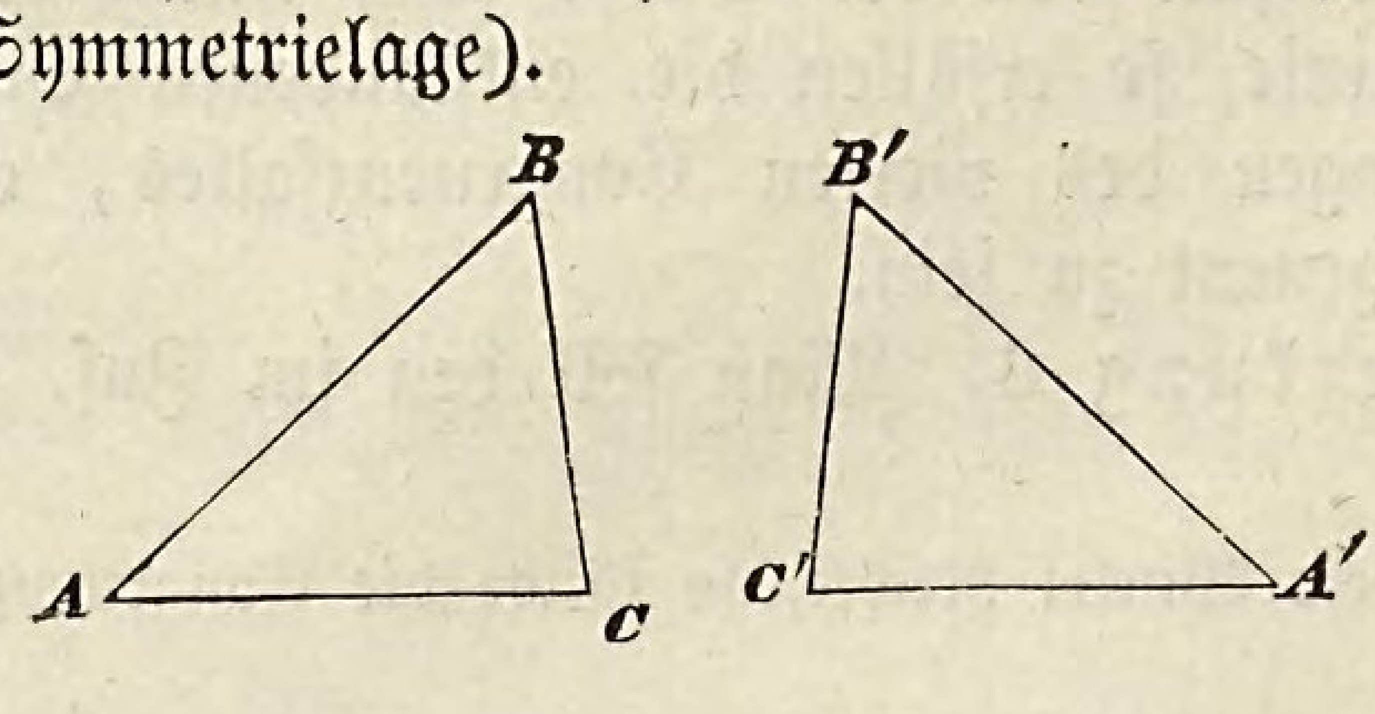
Bestimmungsstücke des Dreiecks.

b) Aus den Sätzen 48 bis 51 ergibt sich, daß ein Dreieck bestimmt ist:

1) Durch 2 Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel;
2) durch eine Seite und zwei Winkel, deren Lage gegen diese Seite bekannt ist;
3) durch 3 Seiten;
4) durch 2 Seiten und den Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüberliegt, wenn man noch dazu weiß, ob der der andern Seite gegenüberliegende Winkel spitz oder stumpf ist, also z. B. durch 2 Seiten und den der größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel.

Symmetrielage.

Zwei congruente Dreiecke, die in einer Ebene liegen, können entweder durch bloßes Verschieben in dieser Ebene zur Deckung gebracht werden, oder es ist nöthig, das eine derselben umzukehren. Letzteres ist der Fall, wenn die in den Congruenzfällen gestellten Bedingungen zwar erfüllt sind, die gleichen Stücke aber nicht im nämlichen Sinne der Drehung auf einander folgen. (Symmetrielage).



53. Die von den Ecken ausgehenden Transversalen im gleichschenkligen Dreiecke.

Zieht man im gleichschenkligen Dreiecke eine Transversale so, daß in Folge der Construktion a) der erste, b) der zweite, c) der dritte Congruenzfall gegeben ist, so erhellt, daß die Halbirung des Winkels an der Spitze, die senkrechte Stellung der Transversale gegen die Grundlinie und die Halbirung der Grundlinie so mit einander zusammenhängen, daß durch Herstellung des einen immer zugleich auch die anderen gemacht werden. Man erhält somit folgende Lehrsätze: Transversale im gleichschenkligen Dreieck.

a) 1) Halbirt man im gleichschenkligen Dreiecke den Winkel an der Spitze durch eine Gerade, so halbirt diese auch die Grundlinie, und steht auf derselben senkrecht.

2) Fällt man im gleichschenkligen Dreiecke eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie so halbirt sie die Grundlinie und den Winkel an der Spitze. (Die Projektionen der Schenkel auf die Grundlinie sind gleich.)

3) Verbindet man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie, so steht die Transversale auf der Grundlinie senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze.

b) Ein Dreieck ist gleichschenklig

1) wenn eine Höhe des Dreiecks einen Winkel desselben halbirt,

2) wenn eine Höhe des Dreicks eine Seite desselben halbirt, (wenn die Projektionen zweier Dreiecksseiten auf die dritte gleich lang sind),

3) wenn eine Transversale zugleich einen Winkel und eine Seite des Dreiecks halbirt.

α) Fällt man von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks Senkrechte auf die Schenkel, so sind

a) diese selbst einander gleich, b) die an der Grundlinie, c) die an der Spitze liegenden Abschnitte der Schenkel einander gleich.

Wie lassen sich die Sätze b) und c) mit Hilfe des Begriffes der Projektion ausdrücken?

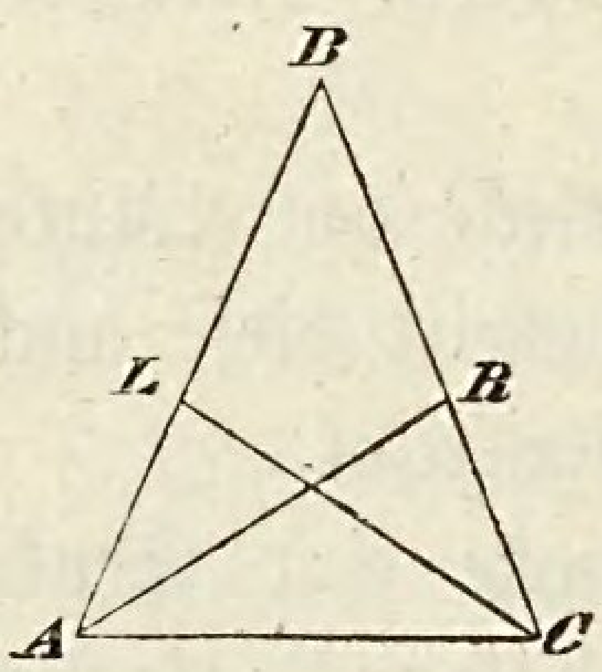
β) Umkehrung der 3 Sätze in α).

γ) Die Transversalen, welche im gleichschenkligen Dreiecke von den Endpunkten der Grundlinie nach den Mittelpunkten der Schenkel gezogen werden, sind gleich.

δ) Sind in einem Dreiecke die Transversalen gleich, welche 2 Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, so sind auch diese Seiten gleich und somit das Dreieck gleichschenklig.

ε) Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Transversalen gleich, welche die Winkel an der Grundlinie halbiren.

ζ) Sind in einem Dreiecke die Transversalen gleich, welche zwei Winkel des Dreiecks halbiren, so sind auch die den halbirten Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, somit das Dreieck gleichschenklig.



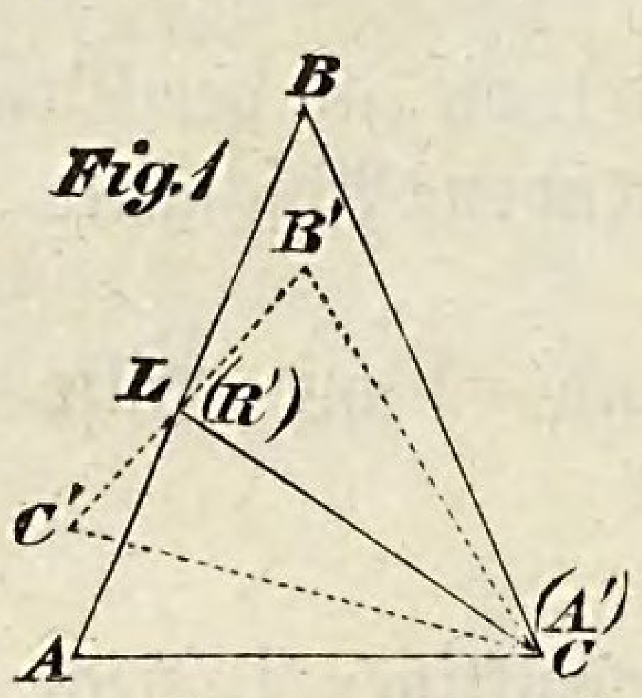
Voraussetzung $\sphericalangle$ BAR = CAR,
$\sphericalangle$ BCL = ACL,
AR = CL,

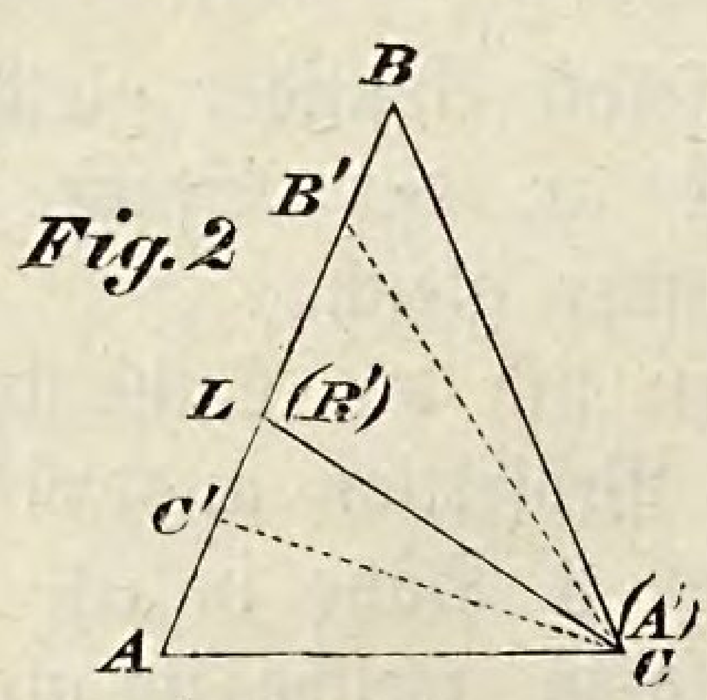
Behauptung BC = BA.

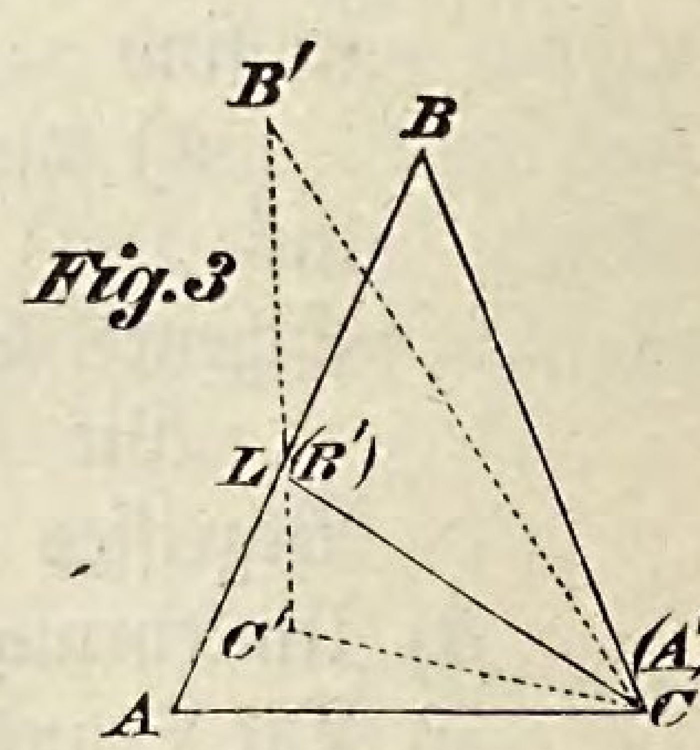
Beweis. Man denke sich zu dem gegebenen Dreiecke ABC ein zweites, diesem congruentes Dreieck A′B′C′ construirt, so daß die in beiden analog bezeichneten Strecken und Winkel gleich sind. Wäre nun BA $\lesseqgtr$ BC, so wären die Winkel BCA und BAC ungleich und der Construktion gemäß auch $\sphericalangle$ BCA $\lesseqgtr$ B′A′C′. Es ist nun zu zeigen, daß keiner dieser Winkel kleiner sein kann, als der andere, daß also z. B. B′A′C′ < BCA unmöglich ist.

Zu diesem Zwecke kehre man das A′B′C′ um und lege es so auf das △ ABC, daß A auf C und A′R′ in die Richtung von CL fällt, so fällt R′ auf L (17).

Ist nun, wie angenommen, $\sphericalangle$ B′A′C′ < BCA, so ist auch $\frac{1}{2}$ B′A′C′ < $\frac{1}{2}$ BCA und es fällt zugleich (Fig. 1) A′B′ zwischen CL und CB, und A′C′ zwischen CL und CA (22), während der Endpunkt B′ 1) in das Dreieck CBL oder 2) in den Umfang zwischen L u. B oder 3) außerhalb des Dreiecks ABC zu liegen kommen kann. Die ersten beiden Lagen (Fig. 1 u. 2) sind unmöglich, weil in beiden Fällen $\sphericalangle$ B′ > B sein müßte (41 γ), was der Construktion widerspricht.







Die dritte Lage (Fig. 3) ist unmöglich, weil sie zu dem Schlusse führt, daß in dem Dreiecke AC′L (C′ liegt dann nothwendig im △ CAL) die Winkelsumme größer als 2 R wäre,

denn $\sphericalangle$ A C′ L + (A′ C′ B′ + A′ C′ A) = 4 R
oder, da $\sphericalangle$ A′ C′ A = C A C′ (A′ C′ = A C),
$\sphericalangle$ A C′ L + (A′ C′ B′ + C A C′) = 4 R.

Ersetzt man zugleich $\sphericalangle$ A′ C′ B′ durch den ihm gleichen Winkel A C B, und $\sphericalangle$ C A C′ durch den größeren $\sphericalangle$ C A B, so wird die linke Seite dadurch größer und somit ist:

$\sphericalangle$ A C′ L + (A C B + C A B) > 4 R,
$\sphericalangle$ A C′ L + (2 R − A B C) > 4 R,
$\sphericalangle$ A C′ L − A B C > 2 R,

umsomehr $\sphericalangle$ A C′ L > 2 R, somit schon ein Winkel des Dreieckes größer als 2 R, umsomehr die Summe der 3 Winkel.

Dieselben Schlüsse widerlegen die Annahme $\sphericalangle$ B C A < B′A′C′. Somit ist B′ A′ C′ = B C A, oder B A C = B C A und B C = B A.

η) Welche Lehrsätze lassen sich aus den vorstehenden Sätzen für die Transversalen des gleichseitigen Dreiecks ableiten?

ϑ) Welche Lehrsätze ergeben sich daraus unmittelbar für die Transversalen im ungleichseitigen Dreiecke?

54. Lehrsatz.

Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche sich über einer gegebenen Strecke (als Basis) errichten lassen, liegen in der Senkrechten, welche die Strecke halbirt. Die senkrechte Halbirungslinie einer Strecke.

Beweis. Man hat zu beweisen, a) daß ein beliebiger Punkt der senkrechten Halbirungslinie von dem einen Endpunkte ebensoweit entfernt ist wie vom anderen; b) daß ein beliebiger Punkt außerhalb jener Geraden ungleiche Entfernungen von den Endpunkten der Strecke hat (a, 15).

Anmerkung. In Folge der bewiesenen Eigenschaft ist die senkrechte Halbirungslinie einer Strecke der geometrische Ort aller Punkte, die von den zwei Endpunkten der Strecke gleichen Abstand haben.

Zusatz 1. Es gibt nur einen Punkt, welcher von 3 nicht in gerader Linie liegenden Punkten gleich weit absteht.

Zusatz 2. Es gibt keinen Punkt, welcher von 3 oder mehreren in gerader Linie liegenden Punkten gleichweit absteht.

Zusatz 3. Man kann von einem Punkte nach einer Geraden nur zwei gleichlange Strecken ziehen.

55. Lehrsatz.

Alle Punkte, welche von den beiden Schenkeln eines Winkels Die Halbirungslinie des Winkels.

gleichweit abstehen, liegen in der Geraden, welche den Winkel halbirt. Beweis durch 49; dann 15, 46 Zus. 1.

Anmerkung. Die den Winkel halbirende Gerade ist somit der geometrische Ort aller Punkte, welche von den beiden Schenkeln gleichen Abstand haben.

56. Lehrsätze.

Schnittpunkt der Winkel-halbirungs-Transversalen.

a) Die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist von den drei Seiten gleich weit entfernt.

Beweis. Man zeige, daß zwei dieser Halbirungslinien sich in einem Punkte schneiden, und ziehe durch den Durchschnittspunkt und das dritte Eck eine Gerade. Von dieser läßt sich nachweisen, daß sie den dritten Winkel halbirt.

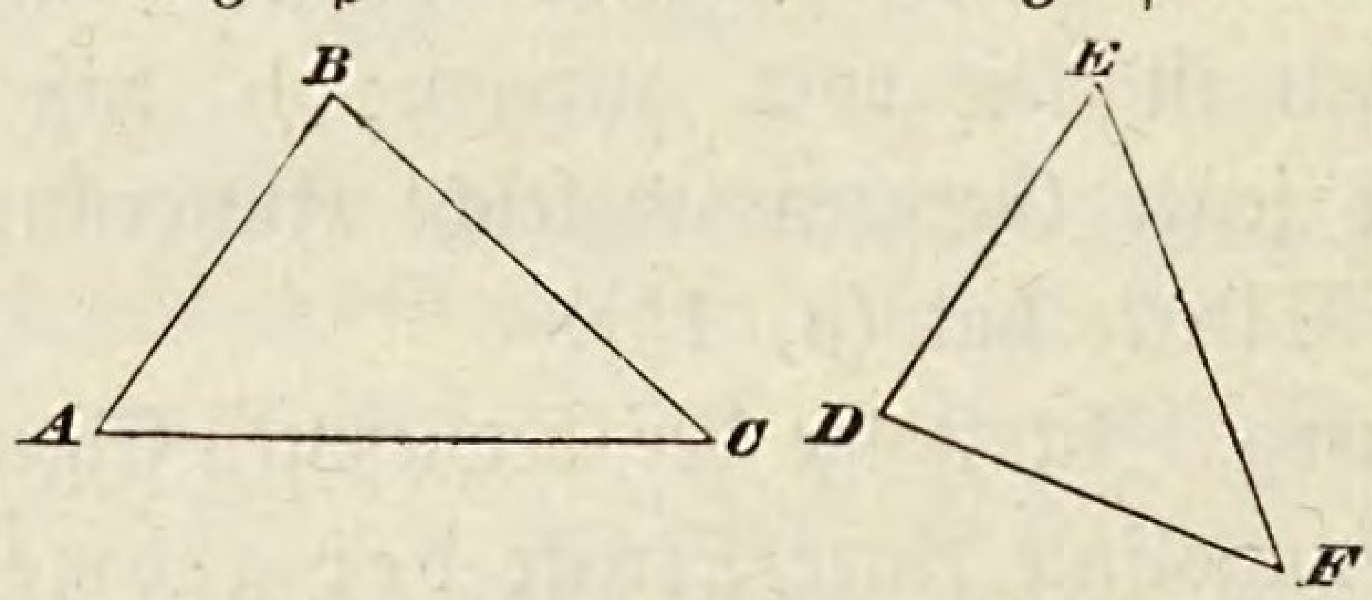
Schnittpunkt der senkrechten Halbirungslinien.

b) Die in den Mittelpunkten der drei Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist von den 3 Ecken gleich weit entfernt. Beweis ähnlich wie zu a).

57. Lehrsätze.

Ungleiche Winkel zwischen gleichen Seiten

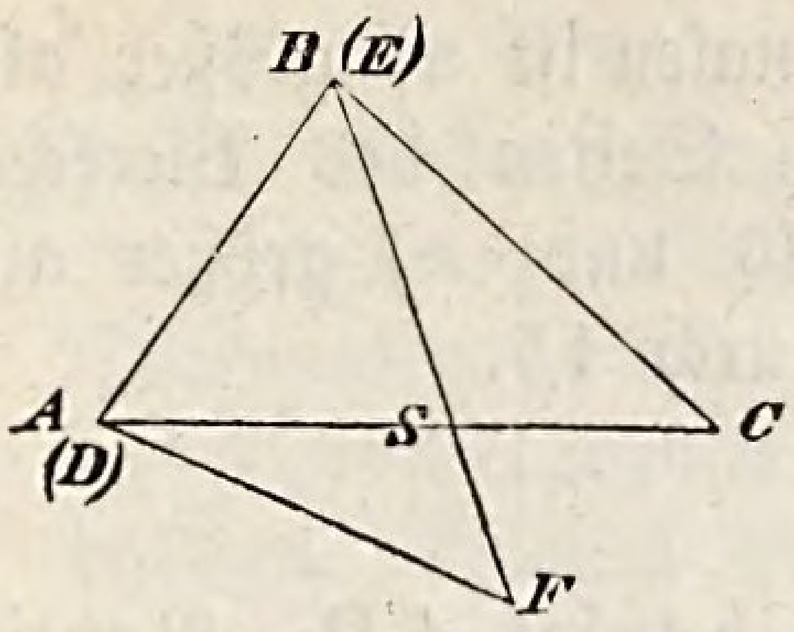
a) Sind zwei Seiten eines Dreiecks einzeln eben so groß, wie zwei Seiten eines anderen, der vom ersten Seitenpaare eingeschlossene Winkel größer, als der vom zweiten eingeschlossene, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.



Voraussetzung: $AB = DE$
$BC = EF$
$\sphericalangle B > \sphericalangle E$

Behauptung: $AC > DE$

Beweis. Die Dreiecke werden mit zwei als gleich bekannten Seiten auf einander gelegt und 3 Fälle unterschieden, je nachdem der Endpunkt vom zweiten Schenkel des kleineren Winkels in den Umfang, innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt; der erste Fall erledigt sich sofort (9), der zweite durch 15 oder 39α, der dritte durch 15 in folgender Weise:



$$AS + SF > DF$$
$$CS + SE > BC$$

Addition ꝛc.

b) Sind zwei Seiten eines Dreiecks einzeln ebenso groß, als zwei Seiten eines anderen Dreiecks, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 48 und 57 a).

c) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, während ein spitzer Winkel des einen größer ist als ein spitzer Winkel des andern Dreiecks, so liegt dem größeren Winkel die größere Kathete gegenüber. Gleiche Hypotenusen.

Beweis durch Aufeinanderlegen: 22, 46 Zus. 2.

d) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, während eine Kathete des einen Dreiecks größer ist als eine Kathete des andern, so liegt der größeren Kathete der größere Winkel gegenüber. Beweis indirekt durch Ausschließung.

Zusatz. Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, während eine Kathete des ersten Dreiecks größer ist als eine Kathete des zweiten, so ist die zweite Kathete des ersten Dreiecks kleiner als die zweite Kathete des zweiten.

e) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke eine Kathete gleich, aber ungleiche Hypotenusen, so sind die beiden anderen Katheten im Sinne der Hypotenusen ungleich; und umgekehrt. Gleiche Katheten.

Zusatz. Von zwei Strecken, welche von einem Punkte aus nach einer Geraden gezogen sind, ist diejenige die längere, deren Endpunkt weiter vom Fußpunkte der von diesem Punkte auf die Gerade gefällten Senkrechten absteht (somit diejenige, welche die größere Projektion hat); und umgekehrt.

IV. Abschnitt.

Vom Vierecke.

58. Erklärung.

Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur heißt Viereck. Seiten, Ecken, Winkel des Vierecks. Die von einem Ecke nach dem gegenüberliegenden gezogene Strecke heißt Diagonale. Das Viereck hat zwei Diagonalen.

Der Umfang und die Diagonalen. Lehrsätze. Die Summe der Diagonalen ist a) größer als die Summe von zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, b) kleiner als der Umfang des Vierecks und c) größer als der halbe Umfang desselben. Beweis durch 15.

59. Lehrsatz.

Winkelsumme. Die Summe der Winkel des Vierecks beträgt 4 R. Beweis durch 41.

Lehrsätze. α) Die Summe der Außenwinkel des Vierecks ist 4 R.

β) Stehen die Schenkel zweier Winkel auf einander senkrecht, so sind die Winkel gleich oder supplementär.

Unterscheide zunächst 3 Fälle, je nachdem der Scheitel des einen Winkels im Winkelraume des andern, außerhalb desselben, oder in einem Schenkel liegt, dann für die beiden ersten Fälle, ob der vom Scheitel nach dem Fußpunkte oder der entgegengesetzt gerichtete Strahl den Winkel bildet.

Endlich entscheidet für den dritten Fall, ob die den Winkel bildenden Strahlen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Schenkels liegen, der den Scheitel enthält.

60. Erklärung.

Parallelogramm. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm.

Eigenschaften. **61.** Lehrsätze. (Eigenschaften des Parallelogramms).

a) Eine Diagonale theilt das Parallelogramm in 2 congruente Dreiecke.

b) Im Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel gleich. Beweis durch 32 oder durch 61 a.

c) Im Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich. Beweis durch 61 a.

d) Die beiden Diagonalen des Parallelogramms halbiren sich. Beweis durch 61 c. und 49.

Zusatz 1. Senkrechte zwischen Parallelen sind gleich groß. Maß für den Abstand der Parallelen. Die zwischen zwei Parallelen gezogene Senkrechte ist das Maß für den Abstand der beiden Parallelen.

Zusatz 2. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von

einer Geraden einen gegebenen Abstand haben, ist die in dem gegebenen Abstande zur Geraden gezogene Parallele.

Lehrsatz. Eine Strecke, welche durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht und 2 Punkte des Umfanges verbindet, theilt das Parallelogramm in zwei congruente Figuren und wird selbst halbirt. Beweis durch Aufeinanderlegen.

62. Lehrsätze. (Erkennungszeichen des Parallelogramms.)

Ein Viereck ist ein Parallelogramm: Erkennungszeichen.

a) wenn die gegenüberliegenden Winkel des Vierecks gleich sind; Beweis durch 59 und 30.

b) wenn die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks gleich sind; Beweis. Man ziehe eine Diagonale und erweise die Congruenz der entstandenen Dreiecke.

c) wenn die Diagonalen des Vierecks sich halbiren.

Anmerkung. Ist auch 61 a umgekehrt richtig?

63. Lehrsätze. (Erkennungszeichen des Parallelogramms.)

α) Sind zwei Seiten eines Vierecks gleich und parallel (╥), so ist das Viereck ein Parallelogramm.

β) Sind zwei Seiten eines Vierecks parallel, die beiden andern gleich lang, und die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln $\lesseqgtr$ 2 R, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Vergl. 76.

γ) Sind zwei Seiten eines Vierecks parallel, und zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

δ) Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten und zwei gegenüberliegende Winkel gleich, und diese Winkel stumpfe oder rechte, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

64. Besondere Parallelogramme.

Nach 61 sind in jedem Parallelogramme sowohl die gegenüberliegenden Seiten als die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Sind demnach in einem Parallelogramme zwei anliegende Seiten gleich, so sind alle vier Seiten desselben gleich groß, und das Parallelogramm erhält, wenn es ungleiche Winkel hat, den Namen Raute oder Rhombus. Ebenso hat die Gleichheit zweier anliegenden Winkel die Gleichheit aller vier Winkel zu Folge, die dann Rechte sein müssen (59). Das gleichwinklige Besondere Parallelogramme.

ungleichseitige Parallelogramm heißt **Rechteck**. Ist endlich das Parallelogramm zugleich gleichseitig und rechtwinklig, so heißt es **Quadrat**.

65. Lehrsätze.

Gleichseitiges Parallelogramm.

Vom **gleichseitigen Parallelogramme** gilt:

a) Die Diagonalen stehen aufeinander **senkrecht**.

b) Die Diagonalen halbiren **die Winkel**, durch deren Scheitel sie gehen.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen ist von den vier **Seiten** gleich weit entfernt.

66. Lehrsätze.

Ein Parallelogramm ist gleichseitig:

a) wenn seine Diagonalen auf einander senkrecht stehen;

b) wenn eine Diagonale einen der Winkel halbirt, durch deren Scheitel sie geht;

c) wenn der Schnittpunkt der beiden Diagonalen von zwei anliegenden Seiten gleich weit absteht.

67. Lehrsätze.

Ungleichseitiges Parallelogramm.

Vom **ungleichseitigen Parallelogramme** gilt:

a) Die Diagonalen bilden schiefe Winkel miteinander, und zwar liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

b) Die Diagonalen theilen die Winkel, durch deren Scheitel sie gehen, in ungleiche Theile, und zwar bilden sie mit der größeren Seite den kleineren Winkel.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen hat ungleiche Entfernungen von zwei anliegenden Seiten des Parallelogramms, und zwar liegt er der größeren näher als der kleineren.

Lehrsätze. α) Bilden die Diagonalen eines Parallelogramms schiefe Winkel mit einander, so ist das Parallelogramm ungleichseitig und zwar liegt dem stumpfen Winkel die größere Seite gegenüber (Umkehrung von a).

β) Umkehrung von b.

γ) Umkehrung von c.

Anmerkung. Indirekte Beweise des ersten Theiles dieser Sätze sind in Nr. 65 und 66 enthalten, man versuche dieselben auch direkt zu erweisen.

68. Lehrsätze.

Bedingungen, unter denen ein Viereck ein gleichseitiges Parallelogramm ist.

α) Das gleichseitige Viereck ist ein gleichseitiges Parallelogramm.

β) Geht von zwei ungleichen, auf einander senkrechten Strecken jede durch die Mitte der andern, so erhält man eine Raute,

wenn man die Endpunkte der Strecken durch gerade Linien verbindet.

γ) Halbiren die **beiden** Diagonalen eines Vierecks die Winkel, durch deren Scheitel sie gehen, so ist das Viereck ein gleichseitiges Parallelogramm.

δ) Stellt man zwei gleiche Strecken so zusammen, daß jede durch die Mitte der andern geht, so begrenzen die Senkrechten, die man auf denselben in ihren Endpunkten errichtet, ein gleichseitiges Parallelogramm, dessen Winkel den von den beiden Strecken gebildeten Winkeln beziehungsweise gleich sind.

69. Lehrsätze.

Vom **rechtwinkligen Parallelogramme** gilt: Rechtwinkliges Parallelogramm.

a) Die Diagonalen sind einander **gleich**.

b) Die beiden Diagonalen bilden mit jeder einzelnen **Seite** zwei gleich große Winkel.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen ist von allen **Ecken** gleich weit entfernt.

70. Lehrsätze.

Ein **Parallelogramm** ist **rechtwinklig**:

a) wenn nur **ein** Winkel als Rechter bekannt ist;

b) wenn seine Diagonalen gleich groß sind;

c) wenn die Diagonalen mit einer Seite gleiche Winkel bilden;

d) wenn der Schnittpunkt der Diagonalen von zwei anliegenden Ecken gleichweit absteht.

71. Lehrsätze.

Vom **schiefwinkligen Parallelogramme** gilt: Schiefwinkliges Parallelogramm.

a) Die Diagonalen sind ungleich, und zwar liegt dem stumpfen Winkel die größere Diagonale gegenüber.

b) Die beiden Diagonalen bilden mit jeder Seite ungleiche Winkel, und zwar die größere Diagonale den kleineren Winkel.

c) Die Entfernungen der Ecken vom Schnittpunkte der Diagonalen sind ungleich, und zwar liegt der Scheitel des spitzen Winkels weiter entfernt als der des stumpfen.

Ein **Parallelogramm** ist **schiefwinklig**:

α) wenn es ungleiche Diagonalen hat, und zwar liegt der größeren Diagonale ein stumpfer Winkel gegenüber;

β) wenn die Diagonalen mit einer Seite ungleiche Winkel bilden, und zwar gehört der größere Winkel dem stumpfen Winkel des Parallelogramms an;

γ) wenn zwei Ecken ungleiche Abstände vom Schnittpunkte der Diagonalen haben, und zwar ist das entferntere Eck der Scheitel des spitzen Winkels.

Bedingungen, unter denen ein Viereck ein rechtwinkliges Parallelogramm ist.

72. Lehrsätze.

Ein Viereck ist ein rechtwinkliges Parallelogramm:

a) wenn seine vier Winkel gleich groß sind, wenn drei Winkel als Rechte bekannt sind ꝛc.;

b) wenn der Schnittpunkt der Diagonalen von allen vier Ecken gleichweit absteht;

c) wenn die Diagonalen mit jeder von drei Seiten des Vierecks zwei gleich große Winkel bilden.

73. Das Quadrat.

Quadrat.

Das Quadrat besitzt alle Eigenschaften des gleichseitigen und des rechtwinkligen Parallelogramms; welche demnach?

Lehrsatz. Stellt man zwei gleiche Strecken so zusammen, daß sie sich senkrecht halbiren, so erhält man ein Quadrat, wenn man ihre Endpunkte durch gerade Linien verbindet.

74. Das Trapez.

Trapez.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem nur zwei Seiten parallel sind, heißt Trapez. Der Abstand der parallelen Seiten ist die Höhe des Trapezes. Will man hingegen von einem Vierecke aussagen, daß keine seiner Seiten der anderen parallel ist, so nennt man es Trapezoid.

Lehrsätze.

a) Eine Parallele, die man zur convergenten Seite durch einen Endpunkt der kleineren Parallelen des Trapezes zieht, zerlegt das Trapez in ein Parallelogramm und in ein Dreieck, welches mit dem Trapeze gleiche Höhe und die Differenz der parallelen Seiten zur Grundlinie hat.

b) Die Strecke zwischen den Mittelpunkten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist den parallelen Seiten parallel und gleich der halben Summe derselben.

Beweis. Man ziehe durch einen der Mittelpunkte eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite und verlängere die kleinere der beiden parallelen Seiten bis zum Durchschnitte. 49. 61c. 63α.

c) Zieht man durch die Mitte einer der nicht parallelen Seiten des Trapezes eine Parallele zu den parallelen Seiten, so geht diese auch durch die Mitte der vierten Seite (und ist der halben Summe der parallelen Seiten gleich).

Beweis indirekt (34), oder direkt durch zwei zur ersten Seite parallele Hilfslinien (49).

Zusatz 1. Ist eine Transversale, welche den parallelen Seiten des Trapezes parallel ist, zugleich die halbe Summe dieser Seiten, so geht sie durch die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten.

Beweis. Man ziehe durch den einen Endpunkt der Transversale eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite. 61 c. 49.

Anmerkung. In Bezug auf eine etwa versuchte dritte Umkehrung des Lehrsatzes bedenke man: Steht eine Strecke (AB), welche vom Punkte A nach einer Geraden gezogen ist, im Punkte B schief auf der Geraden, so gibt es stets noch einen zweiten Punkt C auf der Geraden, welcher ebenfalls um eine Strecke gleich AB von A absteht.

Zusatz 2. Die in den vorstehenden Sätzen genannte Transversale (Mittelinie) halbirt die beiden Diagonalen des Trapezes, und die Strecke zwischen den Halbirungspunkten der Diagonalen ist der halben Differenz der parallelen Seiten gleich.

Zusatz 3. (Verallgemeinerung). Theilt man eine der nicht parallelen Seiten eines Trapezes in n (eine beliebige Anzahl) gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte Parallele zu den parallelen Seiten, so wird die gegenüberliegende Seite ebenfalls in n gleiche Theile getheilt.

Zusatz 4. (Verallgemeinerung). Verbindet man zwei Parallele a und b durch eine Strecke, theilt diese in n gleiche Theile, und zieht durch die Theilpunkte zu a und b parallele Gerade, so wird durch diese Geraden jede zwischen den Parallelen a und b gezogene Verbindungsstrecke in n gleiche Theile getheilt.

75.

Man kann das Dreieck als einen besonderen Fall des Trapezes betrachten, indem man sich denkt, die kleinere der parallelen Seiten des Trapezes sei Null. Deßhalb müssen die in 74 für die Mittelinie des Trapezes erwiesenen Sätze auch dem Dreiecke angepaßt werden können. *Parallele Transversalen im Dreiecke.*

Lehrsätze.

a) Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist der dritten Seite parallel und gleich der Hälfte dieser Seite.

b) Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele zu einer zweiten Seite, so geht die Parallele durch die Mitte der dritten Seite (und ist die Hälfte der zweiten Seite).

Zusatz 1. Ist eine Transversale einer Seite des Dreiecks parallel und ihrer Hälfte gleich, so geht sie durch die Mittelpunkte der beiden andern Seiten.

Die selbständigen Beweise dieser Sätze können ganz ähnlich geführt werden, wie in 74.

Zusatz 2. Theilt man eine Dreiecksseite in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und zieht durch die Theilpunkte Parallele zu einer zweiten Seite, so wird dadurch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt.

76. Das Antiparallelogramm.

Antiparallelogramm.

Erklärung. Sind die nicht parallelen Seiten eines Trapezes einander gleich, so erhält dieses den Namen Antiparallelogramm.

Lehrsätze. Im Antiparallelogramme sind:

a) die den parallelen Seiten anliegenden Winkel einander gleich,
b) die gegenüberliegenden Winkel supplementär,
c) die beiden Diagonalen einander gleich.

Lehrsätze. Ein Trapez ist ein Antiparallelogramm:

α) wenn die Winkel gleich sind, welche einer der parallelen Seiten anliegen;

β) wenn zwei gegenüberliegende Winkel im Trapeze supplementär sind;

γ) wenn die Diagonalen des Trapezes gleich groß sind.

δ) Im Antiparallelogramme steht die Gerade, welche durch die Mitte der parallelen Seiten geht, auf diesen Seiten senkrecht.

Beweis durch senkrechte oder parallele Hilfslinien.

ε) Steht die Gerade, welche man durch die Mittelpunkte der parallelen Seiten eines Trapezes zieht, auf diesen Seiten senkrecht, so ist das Trapez ein Antiparallelogramm.

77. Lehrsätze.

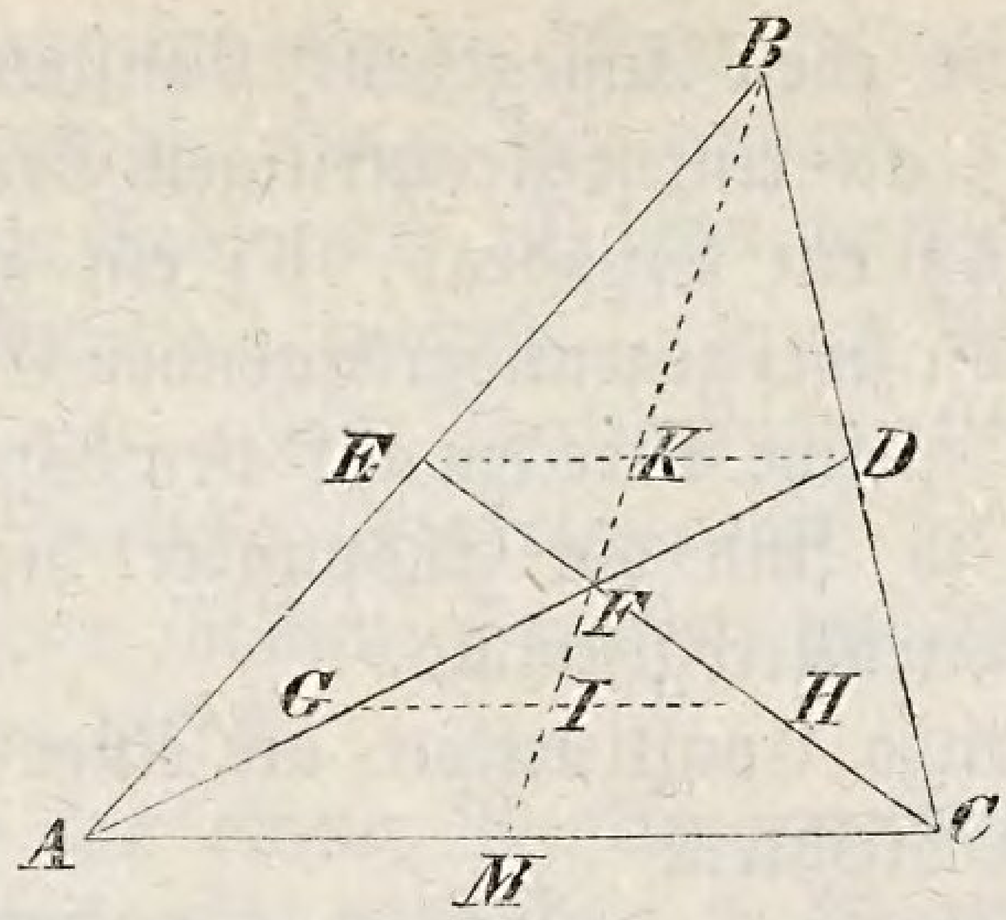
Schnittpunkt der Höhen.

a) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Beweis wird durch Parallele, die man zu den Seiten durch die Ecken zieht, auf 56 b zurückgeführt.

Schnittpunkt der Mittelpunktstransversalen.

b) Die von den Eckpunkten nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Transversalen (Mittelpunktstransversalen), schneiden sich in einem Punkte, welcher von jedem Ecke um $^2/_3$ der betreffenden Transversale entfernt ist.



Beweis. Man ziehe zwei der Mittelpunktstransversalen AD u. CE und zeige, daß die durch deren Schnittpunkt F gezogene Transversale BM durch die Mitte der dritten Seite geht.

Zu diesem Zwecke halbire AF und CF in den Punkten G und H, so ist GH ╥ ED, und deßhalb △ GFH ≌ EFD, GF = FD, ferner △ KFD ≌ FGI, GI = KD = ½ MC; andererseits GI = ½ AM, also MC = AM.

78. Lehrsätze zur Uebung.

1) a) Die Strecke zwischen dem Mittelpunkte der Hypotenuse und dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ist der halben Hypotenuse gleich. Uebungsstoff.

Beweis. Man verlängere die Strecke um ihre eigene Länge. 62 c. 70. 69.

b) Ist die Verbindungsstrecke zwischen einem Ecke und dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite der Hälfte dieser Seite gleich, so liegt der Seite ein rechter Winkel gegenüber. (72 b).

2) Verbindet man die Halbirungspunkte der anliegenden Seiten eines Vierecks durch gerade Linien, so begrenzen diese ein Parallelogramm. Beweis durch 75.

3) Führt man die Construction der vorigen Aufgabe a) an einem gleichseitigen, b) an einem rechtwinkligen Parallelogramme aus, so erhält man a) ein rechtwinkliges, b) ein gleichseitiges Parallelogramm. Warum?

4) Welche Figur wird erhalten, wenn man dieselbe Construction an einem Antiparallelogramme ausführt?

5) Verbindet man die Halbirungspunkte zweier Gegenseiten eines Vierecks mit den Halbirungspunkten der beiden Diagonalen, so erhält man ein Parallelogramm.

6) Trägt man, indem man um ein Parallelogramm herumgeht, von jedem Ecke aus auf der folgenden Seite die nämliche Strecke ab, und verbindet die auf einander folgenden Endpunkte dieser Strecken, so erhält man ein Parallelogramm.

7) Führt man die eben angegebene Construction a) an einem Quadrate, b) an einem gleichseitigen Dreiecke aus, so erhält man wieder a) ein Quadrat, b) ein gleichseitiges Dreieck.

8) Trägt man von zwei gegenüberliegenden Ecken eines Parallelogramms aus gleiche Strecken auf den dort zusammenstoßenden Seiten auf, so sind die Endpunkte dieser 4 Strecken die Ecken eines Parallelogramms.

9) Führt man diese Construction an einer Raute aus, so erhält man ein Rechteck.

10) Trägt man von zwei gegenüberliegenden Ecken eines Parallelogramms aus auf der durch die Diagonale bestimmten Geraden zwei gleich lange Strecken in entgegengesetzter Richtung auf und verbindet die Endpunkte dieser Strecken mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so erhält man ein Parallelogramm.

11) Nimmt man die eben erwähnten Verlängerungen oder Verkürzungen an beiden Diagonalen zugleich, im gleichen Sinne und um die nämliche Strecke vor, so ist das durch Verbindung der vier Endpunkte erhaltene neue Parallelogramm mit dem ursprünglichen zugleich gleichseitig und ungleichseitig, rechtwinklig und schiefwinklig.

12) Von welcher Größe müssen die a) an einer, b) an beiden Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms vorgenommenen Verlängerungen oder Verkürzungen sein, damit man ein Rechteck erhält?

13) Halbirt man die Winkel eines Vierecks, so begrenzen die Halbirungslinien ein Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel supplementär sind.

Anmerkung. Ein solches Viereck erhält man auch durch Halbirung der Außenwinkel.

14) Die Geraden, welche die Winkel eines Parallelogramms halbiren, begrenzen ein Rechteck.

15) Die Geraden, welche die Winkel eines Rechteckes halbiren, begrenzen ein Quadrat.

16) Halbirt man die Winkel, welche von den Diagonalen eines Parallelogramms gebildet werden, so sind die vier Durchschnittspunkte der Halbirungslinien mit den Seiten die Ecken eines gleichseitigen Parallelogramms.

17) Verbindet man die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird durch diese Verbindungslinie die andere Diagonale in drei gleiche Theile getheilt.

18) Verlängert man zwei anliegende Seiten eines Parallelogramms über ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte hinaus,

a) jede um ihre eigene Länge,

b) jede um die Länge der andern,

so liegen die Endpunkte der Verlängerungen mit dem vierten Ecke des Parallelogramms in einer Geraden.

19) Zieht man von einem Punkte in der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks Senkrechte auf die Schenkel, so ist die Summe dieser beiden Strecken der auf einen Schenkel gefällten Höhe gleich.

20) Zieht man von einem Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Senkrechte nach den 3 Seiten, so ist die Summe dieser 3 Strecken der Höhe des Dreiecks gleich.

Beweis mit Hilfe des vorigen Satzes (19) und paralleler Hilfslinien.

21) Die Summe der drei Transversalen, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, ist kleiner als der Umfang des Dreiecks. Beweis durch 75.

79.

Ueber Congruenz der Vierecke im Allgemeinen siehe den folgenden Abschnitt. Congruenz der Parallelogramme.

Da ein Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, so ist das Parallelogramm durch eines dieser Dreiecke vollkommen bestimmt, sobald noch bekannt ist, welche Seite des Dreiecks Diagonale ist. Es kann also die Bemerkung b in 52 auch auf die Parallelogramme bezogen werden, wenn man die Diagonale von den übrigen Seiten unterscheidet. Ebenso lassen sich die Congruenzfälle der Dreiecke den Parallelogrammen anpassen:

Wenn zwei Dreiecke congruent sind, so sind auch die Parallelogramme congruent, die durch die beiden Dreiecke bestimmt sind, wenn man gleiche Seiten der beiden Dreiecke zu Diagonalen wählt.

Diese letztere Bedingung ist nothwendig, weil durch ein Dreieck im Allgemeinen drei von einander verschiedene Parallelogramme bestimmt sind.

Ein Rhombus ist durch einen Winkel und eine Seite, ein Rechteck durch zwei anstoßende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite bestimmt.

Oder: Rhomben, Rechtecke, Quadrate sind congruent, wenn sie die eben genannten Bestimmungsstücke beziehungsweise gleich haben.

Weitere Bestimmungsstücke und Congruenzfälle für die besonderen Parallelogramme lassen sich durch Beiziehen der Diagonalen und der von ihnen unter sich und mit den Seiten gebildeten Winkel leicht ableiten. Vgl. die eindeutigen Construktions-Aufgaben im Anhange zum ersten Theile Nr. 132.

Ein Trapez ist bestimmt, wenn das in 74 a erwähnte Dreieck bestimmt und dazu noch ein von diesem Dreiecke unabhängiges Stück bekannt ist, z. B. die Länge einer der Parallelen. Im Allgemeinen genügen vier von einander unabhängige Merkmale, während zur Bestimmung des Antiparallelogramms drei solche Merkmale hinreichen. Vgl. Anhang Nr. 133.

V. Abschnitt.

Vom Vielecke (Polygon).

80. Erklärung.

Eine von geraden Linien begrenzte ebene Figur heißt im Allgemeinen Polygon. Die begrenzenden Strecken heißen Seiten des Polygons, die Grenze selbst Umfang (Perimeter). Eine Strecke, welche zwei Ecken eines Polygons verbindet, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, heißt Diagonale.

81. Lehrsätze.

Die Anzahl der Ecken eines Polygons ist ebenso groß als die Anzahl seiner Seiten.

Anzahl der Diagonalen. Von einem Ecke eines n-Eckes aus sind (n—3) Diagonalen möglich. Diese theilen das Polygon in (n—2) Dreiecke. Die Anzahl aller möglichen Diagonalen ist $\frac{n(n-3)}{2}$.

82. Lehrsatz.

Winkelsumme. Die Summe aller Winkel eines n-Eckes ist (n—2) 2 R.

Beweis folgt entweder aus 81 und 41; oder für die Form n . 2 R — 4 R dadurch, daß man von einen beliebigen Punkte innerhalb des Polygons Strecken nach jedem Ecke zieht und 41, 26 Zus. 3 anwendet.

Lehrsätze. α) Die Summe der Außenwinkel eines jeden Polygons ist 4 R.

β) Ein Polygon, welches nur concave Winkel hat, kann höchstens drei spitze Winkel haben.

Beweis. Es läßt sich zeigen, daß bei Annahme von mehr als 3 spitzen Winkeln die mittlere Größe der übrigen Polygonswinkel mehr als 2 R beträgt.

83. Erklärung.

Reguläre Polygone.

Ein Polygon heißt regulär, wenn es lauter gleich große Seiten und gleich große Winkel hat.

Beispiele. Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat sind reguläre Polygone.

Zusatz. Die Größe des Winkels eines regulären Polygons ist mit der Seitenzahl zugleich gegeben.

Aufgaben. Wie groß ist der Winkel des regulären Sechseckes, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, des Fünfecks, Zehnecks, Zwanzigecks, des Achtecks, Sechzehnecks und des Fünfzehnecks?

84. Lehrsatz.

Congruenzfälle der Polygone I.

Zwei Polygone (n-Ecke) sind congruent, wenn (n—1) Seiten und die (n—2) von diesen Seiten gebildeten Winkel in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind wie im anderen.

Beweis durch Aufeinanderlegen.

Anmerkung. Hier fehlte vorerst die Kenntniß von der Uebereinstimmung einer Seite und der zwei anliegenden Winkel. Vergl. 48.

85. Lehrsatz.

Die Congruenz zweier Polygone (n-Ecke) ist erwiesen, sobald man erkannt hat, daß (n—2) aufeinanderfolgende Seiten und die (n—1) Winkel, deren Schenkel diese Seiten sind, in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind, wie im anderen. II.

Beweis durch Aufeinanderlegen.

Anmerkung. Man ist hier hinsichtlich der Uebereinstimmung zweier Seiten und des davon eingeschlossenen Winkels vorerst ungewiß und schließt aus der Uebereinstimmung der übrigen Stücke mit Sicherheit auf die Congruenz. Vergl. 49.

86. Lehrsatz.

Zwei hohlwinklige Polygone sind congruent, wenn alle Seiten und (n—3) auf einander folgende Winkel in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind, wie im anderen. III.

Beweis durch Aufeinanderlegen mit Berücksichtigung von 48 und 50.

87. Lehrsatz.

Zerlegung in congruente Dreiecke.

Zwei congruente Polygone werden durch Diagonalen, die von congruenten Ecken ausgehen, in congruente Dreiecke getheilt.

Beweis. Die Dreiecke decken sich zugleich mit den Polygonen.

Zusatz. Aus n Paaren congruenter Dreiecke kann man zwei congruente Polygone [(n + 2)=Ecke] zusammensetzen.

88. Lehrsätze.

Der Umfang eines Polygons und die Gerade.

a) Eine Gerade, die einen Punkt innerhalb einer ebenen Figur hat, schneidet den Umfang derselben in wenigstens zwei Punkten.

Zwei Perimeter der Lage nach,

b) Liegen zwei ebene Figuren so, daß die eine einen Punkt ihres Umfangs innerhalb, und einen Punkt ihres Umfangs außerhalb der anderen Figur hat, so schneiden sich die Begrenzungen der Figuren in wenigstens zwei Punkten.

Der Beweis dieser Sätze ergibt sich aus dem Begriffe der Figur als allseitig begrenzter Ebene: Jede Linie, welche von einem Punkte innerhalb nach einem Punkte außerhalb einer begrenzten Ebene gehen soll, muß die Grenze wenigstens einmal überschreiten.

der Größe nach verglichen.

c) Ist ein hohlwinkliges Polygon A von einem anderen (beliebigen) Polygone B vollständig eingeschlossen, sei es, daß A Punkte oder einen Theil des Umfangs mit B gemeinschaftlich hat oder nicht, so ist der Umfang des Polygons A kleiner als der Umfang des Polygons B.

Zum Beweise verlängere man die Seiten des Polygons A bis zum Umfange von B und wende wiederholt 15 an. Nach Addition der erhaltenen Ungleichungen fallen sämmtliche Hilfslinien heraus, weil sie auf beiden Seiten vorkommen.

Man bemerkt, daß dieser Satz von der Seitenzahl des umschlossenen Polygons unabhängig ist.

VI. Abschnitt.

Vom Kreise.

89. Erklärungen.

Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen

Linie begrenzt wird, in der alle Punkte von einem Punkte gleichweit entfernt sind.

Die Grenzlinie des Kreises heißt Peripherie (Kreislinie), ein Theil der Peripherie Bogen. Der Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleich weit abstehen, heißt Mittelpunkt (Centrum), die Entfernung des Mittelpunktes von einem Punkte der Peripherie Radius (Halbmesser).

Eine Strecke, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt im Allgemeinen Sehne (Chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie Durchmesser (Diameter). Verlängert man eine Sehne, so erhält man eine Secante. Eine Gerade, welche nur einen Punkt mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, heißt Tangente, der gemeinschaftliche Punkt, Berührungspunkt.

Ein Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpunkte hat, heißt Centriwinkel, ein Winkel, der seinen Scheitel in der Peripherie hat, und dessen Schenkel Sehnen (Secanten) sind, Peripheriewinkel. Ein Winkel, (dessen Scheitel in der Peripherie liegt und) der von einer Sehne und Tangente gebildet wird, heißt Tangentialwinkel.

Sector oder Kreisausschnitt heißt jener Theil des Kreises, welcher von zwei Radien und einem Bogen begrenzt ist. Segment oder Kreisabschnitt heißt derjenige Theil des Kreises, welcher von einer Sehne und einem Bogen begrenzt wird. Jede Sehne theilt den Kreis in zwei Segmente.

90. Construction eines Kreises.

Nimmt man den einen Endpunkt A einer Strecke AB fest und dreht die Strecke um diesen Punkt, so beschreibt der andere Endpunkt B eine Linie, welche mit A als Mittelpunkt und AB als Radius der eben gegebenen Definition entspricht, und vollendet man die Drehung bis zur ganzen Umdrehung, so erhält man eine (geschlossene) Figur, innerhalb welcher der Punkt A liegt.

91. Lehrsatz.

Die Peripherie als geometrischer Ort.

Es gibt weder außerhalb noch innerhalb des nach 90 construirten Kreises einen Punkt, welcher um AB von A entfernt ist.

Beweis. Verbindet man einen Punkt außerhalb mit dem Mittelpunkte durch eine gerade Linie, so schneidet diese die Peripherie

(88) und ist größer als der Radius, weil dieser ein Theil von ihr ist, während die Strecke, welche einen Punkt innerhalb mit dem Mittelpunkte verbindet, verlängert werden muß, um dem Radius gleich zu werden.

Es enthält somit die durch obige Construction erhaltene Peripherie alle Punkte der Ebene, welche von A die Entfernung AB haben, und es gibt zu einem gegebenen Mittelpunkte und Radius nur eine Peripherie, oder:

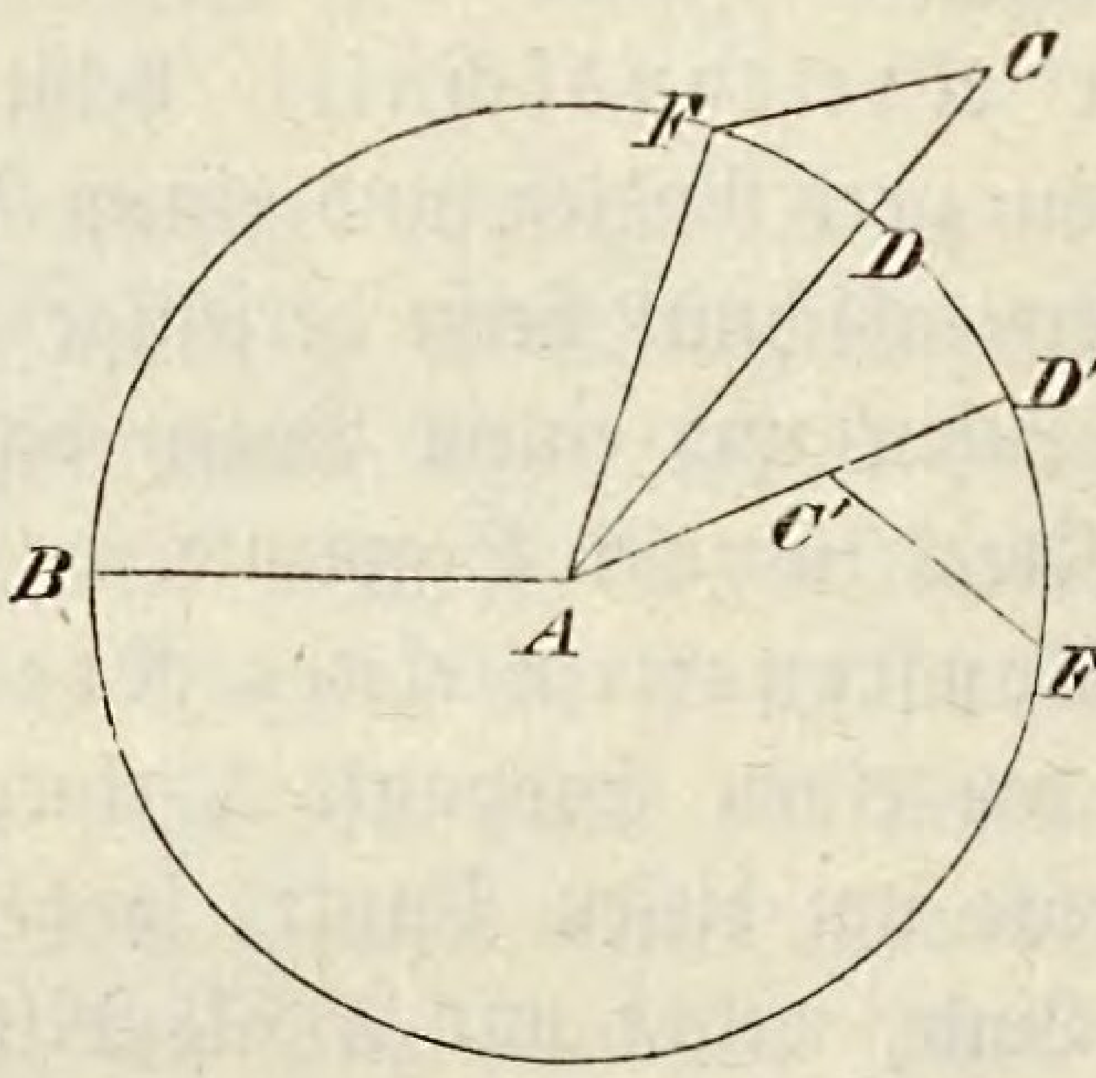
Die Peripherie des mit AB um A beschriebenen Kreises ist der geometrische Ort aller Punkte die von A um die Strecke AB abstehen.

92. Lehrsatz.

Mittelpunkt und Radius durch die Peripherie bestimmt.

Es gibt weder innerhalb noch außerhalb des durch obige Construktion (90) erhaltenen Kreises einen Punkt, der von allen Punkten der Peripherie gleichweit entfernt wäre.

Beweis. Es sei C irgend ein Punkt außerhalb des Kreises, so ziehe AC. Diese Strecke schneidet die Peripherie in D. Ferner sei F ein beliebiger Punkt der Peripherie, ziehe AF und CF, so ist $CF > CD$.



Sei C' ein Punkt innerhalb, so verlängere AC' bis zum Durchschnitte D' mit der Peripherie; ist dann F' ein beliebiger Punkt der Peripherie, so folgt $C'D' < C'F'$.

Somit ist der Punkt A, welcher der Construction (90) gemäß innerhalb der beschriebenen Figur liegt, der einzige Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleichweit (um AB) entfernt sind, d. h. zu einer gegebenen Peripherie gibt es nur einen Mittelpunkt und Radius.

93. Lehrsatz.

Der Kreis ist der Größe und Form nach durch seinen Radius vollkommen bestimmt, oder: zwei Kreise von gleichen Radien sind congruent. Congruenz zweier Kreise.

Beweis. Legt man die beiden Kreise mit ihren Mittelpunkten aufeinander, so müssen sich auch die Grenzen decken (91).

94. Lehrsatz.

Gleich große Bögen, welche Kreisen von gleichen Radien angehören, sind congruent. Congruenz gleicher Bögen.

Beweis. Nennt man diejenigen Grenzpunkte der beiden Bögen Anfangspunkte, von welchen aus die Bögen, vom Mittelpunkte aus betrachtet, sich nach der nämlichen Richtung hin erstrecken, so ist offenbar, daß man die beiden Kreise, denen die Bögen angehören, so zur Congruenz bringen kann, daß zugleich die Anfangspunkte der Bögen zusammenfallen und die beiden Bögen von diesen aus nach derselben Seite hin liegen. Nun kann wegen 93 kein Punkt des einen Bogens außerhalb der Peripherie des anderen Kreises liegen, und würde der Endpunkt des einen Bogens nicht mit dem Endpunkte des andern zusammenfallen, so wären die Bögen um das zwischen den Endpunkten liegende Stück der Peripherie von einander verschieden.

Anmerkung 1. Der Lehrsatz enthält den wichtigen Satz, daß die Form der Kreislinie in allen Theilen dieselbe ist.

Anmerkung 2. Dieser und die folgenden Sätze, welche von den elementaren Eigenschaften des Kreises handeln, enthalten die Voraussetzung „Wenn zwei Kreise gleiche Radien haben". Sie gelten somit selbstverständlich auch für den Fall, daß die geometrischen Gebilde, von denen angenommen ist, daß sie in solchen Kreisen liegen, einem und demselben Kreise angehören.

95. Lehrsatz.

Die Lage und der Halbmesser eines Kreises sind durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, durch welche die Peripherie gehen soll, vollkommen bestimmt, oder: Der Kreis durch drei Punkte der Peripherie bestimmt.

Zwei Kreise, deren Peripherien durch drei gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte gehen, können von einander nicht mehr unterschieden werden.

Beweis. Seien die 3 Punkte A, B u. C, so ist nach 54

der Durchschnittspunkt der senkrechten Halbirungslinien der Strecken A B u. B C der einzige Punkt der Ebene, welcher von den 3 Punkten A, B, C gleichweit entfernt ist. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt, seine Entfernung von A der Radius. Vergl. 54 Zus. 1.

Zusatz 1. Die Peripherie eines Kreises kann nicht durch 3 in gerader Linie liegende Punkte gehen. Vergl. 54 Zusatz 2.

Zusatz 2. Eine Gerade schneidet einen Kreis in höchstens zwei Punkten. Vergl. 53.

Zusatz 3. Kein noch so kleiner Theil der Peripherie eines Kreises ist geradlinig.

Zusatz 4. Ein gegebener Kreisbogen kann nur einem einzigen Kreise angehören oder: Lage und Radius des Kreises sind durch einen beliebigen Bogen desselben bestimmt.

Zusatz 5. Von einem beliebigen (vom Mittelpunkte verschiedenen) Punkte aus lassen sich nur zwei gleich lange Strecken an eine gegebene Kreislinie ziehen.

Zusatz 6. Zwei Kreislinien können sich höchstens in zwei Punkten schneiden.

Zusatz 7. Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die drei Ecken geht.

96. Lehrsätze.

Lage eines Punktes gegen einen Kreis.

Aus den Sätzen 91 u. 92 folgt für die Lage eines Punktes gegen einen Kreis:

Ein Punkt liegt

a) innerhalb,

b) in der Peripherie,

c) außerhalb eines Kreises, wenn seine Entfernung vom Mittelpunkte

  a) kleiner,

  b) gleich,

  c) größer als der Radius ist; und umgekehrt.

Der kleinste und größte Abstand eines Punktes von der Peripherie eines Kreises liegt auf der Geraden, welche durch den Punkt und den Mittelpunkt geht. Vergl. 92.

97.

Mit Rücksicht auf 95 Zus. 2 kann eine Gerade mit einer Kreislinie

Lage einer Geraden gegen einen Kreis.

a) keinen,

b) einen,

c) zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

98. Lehrsätze.

Die Gerade trifft den Kreis nicht.

a) Die Gerade hat keinen Punkt mit der Kreislinie gemein, wenn die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte größer als der Radius ist (die Senkrechte ist die kürzeste, 96).

b) Hat eine Gerade keinen Punkt mit der Kreislinie gemein, so ist die vom Mittelpunkte auf die Gerade gefällte Senkrechte größer als der Radius.

c) Der kleinste und größte Abstand der Geraden von der Peripherie liegt auf der genannten Senkrechten, d. h. die Senkrechte enthält jene beiden Punkte der Peripherie, welche der Geraden unter allen Punkten der Peripherie am nächsten und am entferntesten liegen.

99. Lehrsätze.

Die Tangente.

a) Die Gerade hat nur einen Punkt mit der Kreislinie gemein (ist Tangente an den Kreis), wenn die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte dem Radius gleich ist.

b) Die Tangente steht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht.

Beweis zu b). Da dem Begriffe der Tangente gemäß alle übrigen Punkte dieser Geraden außerhalb des Kreises liegen, so ist (nach 96) der Radius die kleinste Linie, die vom Mittelpunkte nach der Tangente gezogen werden kann. 46 Zus. 3.

c) Die vom Mittelpunkte des Kreises auf die Tangente gefällte Senkrechte geht durch den Berührungspunkt.

Beweis indirekt.

d) Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Senkrechte geht durch den Kreismittelpunkt. Beweis indirekt.

Zusatz. Verbindet man mit den vorgetragenen Lehren den Satz 56a, dem gemäß jedes Dreieck einen Punkt hat, der

von seinen drei Seiten gleichweit absteht, so folgt, daß zu jedem Dreiecke ein Kreis beschrieben werden kann, den die drei Seiten des Dreiecks berühren. Man sagt von diesem Kreise: er ist dem Dreiecke eingeschrieben, oder von dem Dreiecke: es ist um den Kreis beschrieben. Hingegen heißt ein Kreis, welcher eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der zwei andern Seiten berührt, dem Dreiecke angeschrieben.

100. Lehrsätze.

Tangenten.

a) Schneiden sich zwei Tangenten eines Kreises, so sind die Strecken zwischen dem Durchschnittspunkte und den Berührungspunkten einander gleich.

b) Sind die Seiten eines Vierecks Tangenten eines Kreises (ist das Viereck um den Kreis beschrieben, Tangentenviereck), so sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich groß.

c) Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so läßt sich in dasselbe ein Kreis einschreiben, der die 4 Seiten berührt.

Beweis. Man zeige, daß der Punkt, welcher von drei Seiten gleichweit absteht, denselben Abstand von der vierten Seite hat, indirekt durch 57 d Zus.

Zusatz. In jedes gleichseitige Viereck läßt sich ein Kreis einschreiben.

101. Lehrsätze.

Die Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten.

a) Eine Gerade hat zwei Punkte mit einer Kreislinie gemein, wenn die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte kleiner ist als der Radius.

Beweis. Der Fußpunkt der Senkrechten liegt nach 96 innerhalb des Kreises, 88 a.

b) Hat eine Gerade zwei Punkte mit einer Kreislinie gemein, so ist die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte kleiner als der Radius.

Ein indirekter Beweis hiefür liegt in 98 und 99, ein direkter in 37 und 46 Zus. 2.

c) Ist von einer Geraden bekannt, daß sie einen Punkt mit einer Kreislinie gemein hat, und bildet sie mit dem an diesen Punkt gezogenen Radius schiefe Winkel, so hat

die Gerade noch einen zweiten Punkt mit der Kreislinie gemeinschaftlich.

Beweis. Zieht man vom Mittelpunkte eine Senkrechte auf die Gerade, so ist diese kleiner als jede Schiefe, somit kleiner als der Radius.

d) Die Radien, welche nach den zwei Schnittpunkten einer Geraden mit einer Kreislinie (nach den Endpunkten einer Sehne) gezogen werden, stehen schief auf der Geraden.

Beweis durch 43 Zus. 3.

Anmerkung. Von einer Geraden, welche die Peripherie in zwei Punkten schneidet, gehört eine Strecke dem Kreise als Sehne an.

102. Lehrsätze.

Die Sehne.

a) Eine Senkrechte, die man vom Mittelpunkte des Kreises auf die Sehne fällt, halbirt die Sehne.

b) Eine Gerade, welche den Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkte der Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

c) Eine Gerade, welche die Sehne senkrecht halbirt, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

103. Lehrsätze.

Zwei Sehnen.

Gleich lange Sehnen, welche Kreisen mit gleichen Radien angehören, haben gleiche Abstände von ihren Kreismittelpunkten; und umgekehrt.

104. Lehrsätze.

a) In Kreisen von gleichen Radien liegt die größere Sehne dem Mittelpunkte näher.

b) In Kreisen von gleichen Radien ist diejenige Sehne größer, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

Beweise am leichtesten durch 57d Zus.

Zusatz. Der Durchmesser ist die größte Sehne. Beweis auch durch 15.

105. Lehrsätze.

Sind in Kreisen von gleichen Radien

Gegenseitige Abhängigkeit der Sehnen, Centriwinkel, Bögen, Sectoren und Segmente.

a) zwei Sehnen gleich, so sind auch die zugehörigen Centriwinkel und Bögen, Sectoren und Segmente gleich (congruent).

Beweis durch Congruenz.

b) Sind zwei Centriwinkel gleich, so sind auch die zugehörigen Sehnen, Bögen, Sectoren und Segmente gleich (congruent).

c) Sind zwei Bögen gleich, so sind auch die zugehörigen Sehnen, Centriwinkel, Sectoren und Segmente gleich (congruent).

Beweis durch 94.

d) Sind zwei Sectoren oder Segmente gleich, so sind auch die zugehörigen Bögen, Sehnen und Centriwinkel gleich.

Beweis. Wären die Bögen ungleich, so könnte man die Kreise so aufeinander legen, daß der kleinere Bogen als Theil des größeren erscheint (94). Dann würde, wenn die zugehörigen Sehnen und Radien gezogen werden, auch die eine Fläche als Theil der anderen erscheinen, was gegen die Voraussetzung ist.

Zusatz 1. Dem Lehrsatze gemäß halbirt eine Gerade, welche den Centriwinkel halbirt, stets auch den Bogen; ferner theilt ein Radius, der den Bogen halbirt, auch den Centriwinkel in zwei gleiche Theile, und endlich geht nach 53 a die Halbirungslinie des Centriwinkels durch die Mitte der Sehne und steht auf derselben senkrecht.

Somit ergibt sich der Satz:

Die Mittelpunkte des Kreises, der Sehne und des Bogens liegen in einer Geraden, welche auf der Sehne senkrecht steht.

Erfüllt eine Gerade zwei dieser vier Bedingungen, so erfüllt sie auch die übrigen, und es ergeben sich durch Specialisirung zunächst $\left(\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} =\right)$ sechs Sätze deren Formulirung zur Uebung vorgenommen werden kann.

Außerdem wird der Centriwinkel von der so bestimmten Geraden stets halbirt, und andererseits genügt die Halbirung des Centriwinkels (da sie die Erfüllung der ersten Bedingung in sich schließt) allein zur Bestimmung der Geraden.

Ferner folgt: Ist eine der oben genannten vier Bedingungen erfüllt, während man von einer zweiten weiß, daß sie nicht erfüllt ist, so ist auch keine der übrigen erfüllt.

Es kann also z. B. ein Strahl, der von der Mitte des Bogens aus nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, die Sehne nicht halbiren u. s. w.

Zusatz 2. Die Untersuchung über die gegenseitige Abhängigkeit des Radius, der Sehne, des Centriwinkels und des Bogens läßt sich noch dadurch weiter führen, daß man den Lehrsätzen in Nr. 105 negative Voraussetzungen zu Grunde legt, z. B.

Lehrsätze. 1) Sind in Kreisen von gleichen Radien zwei Sehnen ungleich ($c_1 > c_2$), so gehört zu der kleineren Sehne der kleinere Centriwinkel.

2) Sind in Kreisen von ungleichen Radien ($r_1 > r_2$), zwei Sehnen gleich ($c_1 = c_2$) so sind die zugehörigen Centriwinkel ungleich, und zwar gehört der größere Centriwinkel dem kleineren Kreise an.

Lehrsätze zur Uebung.

1) Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier parallelen Sehnen steht auf denselben senkrecht (und geht durch den Mittelpunkt des Kreises). Die Umkehrungen dieses Satzes sind richtig.

2) Die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte paralleler Tangenten geht durch den Mittelpunkt des Kreises; und umgekehrt.

3) Ist eine Tangente einer Sehne parallel, so geht die vom Berührungspunkte nach der Mitte der Sehne gezogene Gerade durch das Centrum (und steht auf beiden Geraden senkrecht).

Die Umkehrungen dieses Satzes sind richtig.

4) Zwischen zwei parallelen Sehnen oder Tangenten eines Kreises liegen zwei gleich große Bögen.

Ebenso sind die beiden Bögen gleich, welche zwischen dem Berührungspunkte einer Tangente und den Endpunkten einer ihr parallelen Sehne liegen.

Die Umkehrung dieses Satzes ist nur für die beiden letzten Fälle allgemein richtig.

5) Zwei Sehnen, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, können sich nicht halbiren.

6) Läßt man eine gegebene Strecke mit ihren Endpunkten auf den beiden Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke einen Kreisbogen (Quadranten).

7) Ist ein Kreis einem Dreiecke angeschrieben, so ist die Summe zweier Dreiecksseiten und ihrer Verlängerungen bis zu den Berührungspunkten dem Umfange des Dreiecks gleich.

106. Lehrsatz.

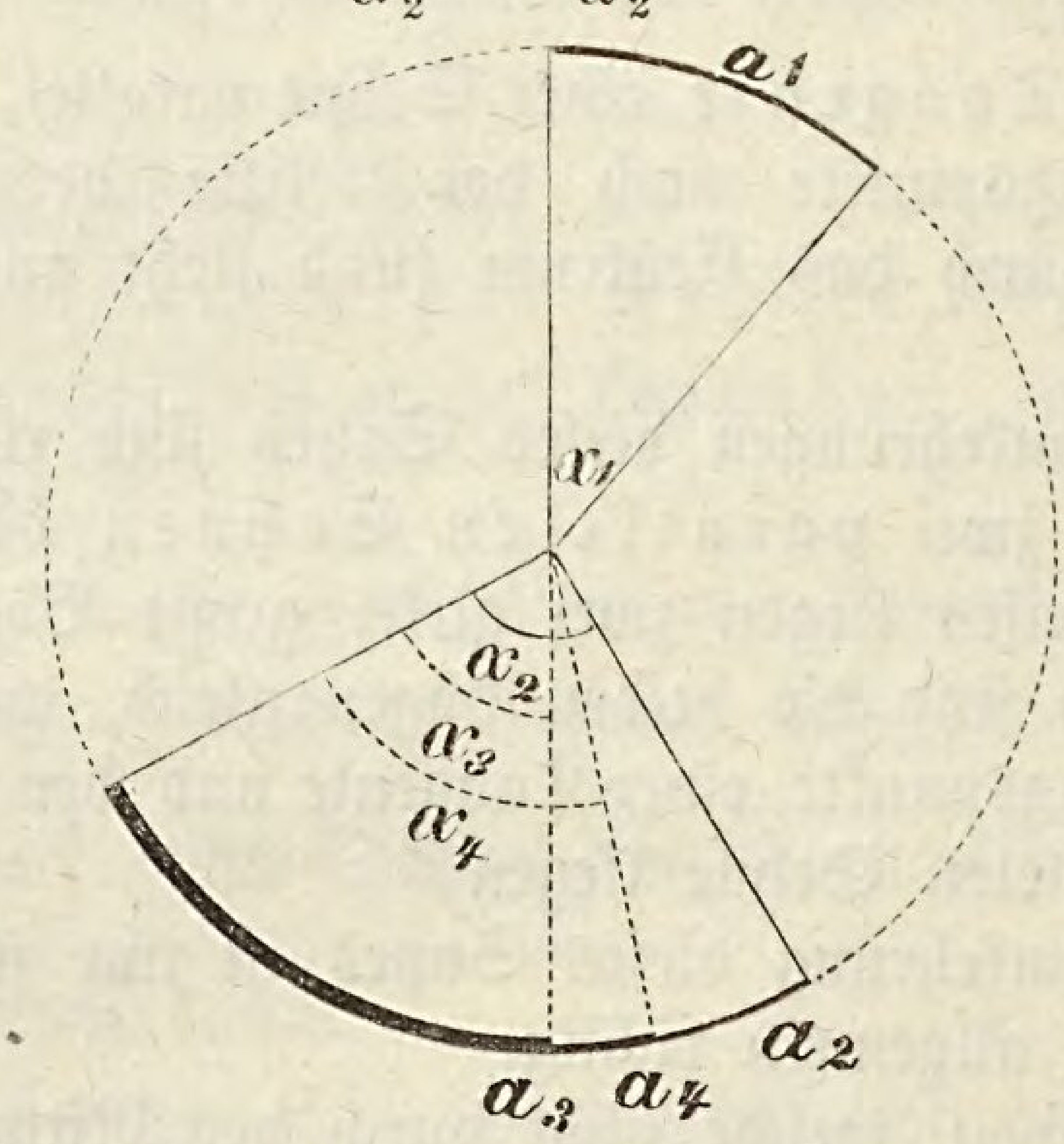
Das Verhältniß der Bögen.

In Kreisen von gleichen Radien verhalten sich die Bögen wie die zugehörigen Centriwinkel.

Beweis. a) Sind die Centriwinkel α_1 u. α_2 commensurabel, d. h. gibt es einen Winkel β, der in beiden ohne Rest enthalten ist, so kann man
$$\alpha_1 = x \,.\, \beta,$$
$$\alpha_2 = y \,.\, \beta$$
setzen, und es wird das Verhältniß der Centriwinkel
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{x}{y}.$$

Denkt man sich nun den Winkel α_1 in x, den Winkel α_2 in y gleiche Theile von der Größe β getheilt, so wird (nach 104) bei gehöriger Länge des Theilungslinien auch der zugehörige Bogen a_1 in x, der Bogen a_2 in y gleiche Bögen getheilt, deren jeder die Länge b haben mag, und es ist
$$a_1 = x\,b,$$
$$a_2 = y\,b,$$
folglich $\frac{a_1}{a_2} = \frac{x}{y}$,

und demnach $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}$.



b) Sind die Centriwinkel incommensurabel, so kann auch in diesem Falle ihr Verhältniß von dem der Bögen nicht verschieden sein. Denn wäre dieses der Fall und beispielsweise
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{a_1}{a_2},$$
so könnte man die Gleichung dadurch wiederherstellen, daß man a_2 durch einen kleineren Bogen a_3 ersetzte, so daß also

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_3} \text{ und } a_3 < a_2$$

wäre. Dieses ist aber unmöglich.

Theilt man nämlich a_1 (etwa durch fortgesetzte Halbirungen des Centriwinkels) in so kleine Theile, daß einer dieser Theile (b') kleiner wird als $a_2 - a_3$, und trägt diese Theile auf a_2 ab, so fällt wenigstens ein Theilpunkt zwischen die Endpunkte von a_3 u. a_2 und bildet der Endpunkt eines Bogens a_4, der größer als a_3 und kleiner als a_2 ist und mit a_1 ein gemeinschaftliches Maß (b') hat, während der zugehörige Centriwinkel α_4 ebenfalls größer als α_3 und kleiner als α_2 ist. Es gilt nun dem in a) Bewiesenen gemäß

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = \frac{a_1}{a_4} \text{ oder } \frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_4}{a_4},\text{*)}$$

und der Hypothese gemäß

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_3} \text{ oder } \frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_3},$$

$$\text{daher } \frac{\alpha_4}{a_4} = \frac{\alpha_2}{a_3},$$

$$\text{oder } \frac{\alpha_4}{\alpha_2} = \frac{a_4}{a_3},$$ wobei links ein ächter, rechts ein unächter Bruch stünde. Die Hypothese ist folglich unmöglich. Ebenso erledigt sich die Hypothese $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{a_1}{a_2}$, so daß auch hier nur $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}$ möglich bleibt.

Zusatz 1. Denkt man sich um den Scheitel eines rechten Winkels, als Mittelpunkt, mit beliebigem Radius einen Kreis beschrieben und den rechten Winkel in Grade, Minuten, Sekunden getheilt, so schneiden die Theilungslinien ebenso viele gleiche Theile von dem Bogen ab, der den vierten Theil der Peripherie bildet und deßhalb den Namen Quadrant erhalten hat. Gradmaß des Bogens.

Man ist nun übereingekommen, die Ausdrücke Grad, Minute, Sekunde ebensowohl auf $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{90.60}$, $\frac{1}{90.60.60}$ des Quadranten zu beziehen, wie sie gemäß 23 für die gleichen Bruchtheile des rechten Winkels gelten

Somit hat jeder Bogen ebensoviele Grade, Minuten, Sekunden, als der ihm zugehörige Centriwinkel. Die ganze Peripherie hat

*) Ueber arithmetische Umformungen von Proportionen siehe Nr. 163.

360 Grade. In Kreisen von gleichen Radien sind Bögen, welche durch die nämliche Anzahl von Graden u. s. w. ausgedrückt werden, gleich lang; in Kreisen von verschiedenen Radien hingegen entsprechen der nämlichen Anzahl von Graden verschiedene lange Bögen, d. h. die Länge des Bogengrades ist (in später zu ermittelnder Weise) von der Größe des Radius abhängig.

Längenmaß für den Winkel.

Zusatz 2. Denkt man sich um den Scheitel eines beliebigen Winkels (α), als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem der Längeneinheit (Meter) gleichen Radius beschrieben, so liegt ein Bogen (von der Länge a) zwischen den Schenkeln des Winkels (α), welcher in folgendem Sinne als Maß des Winkels betrachtet werden kann.

1) Bezeichnet q die Länge des Quadranten, so ist dem Lehrsatze gemäß

$$\frac{\alpha}{R} = \frac{a}{q}$$

$$\text{oder } \sphericalangle\, \alpha = \frac{a}{q}\, R \; . \; . \; . \; (1$$

d. h. der Winkel hat so viele Rechte, als der Bogen a Quadranten enthält.

2) Unter allen möglichen Bögen wird einer der Längeneinheit vollständig gleich sein müssen. Der ihm zugehörige Centriwinkel sei m, so ist aus (1

$$\sphericalangle\, m = \frac{1}{q} . \, R$$

oder insoferne q die (absolute) Zahl bedeutet, welche angibt, wie oft die Längeneinheit in der Länge des (mit der Längeneinheit beschriebenen) Quadranten enthalten ist

$$\sphericalangle\, m = \frac{R}{q}$$

d. h. der zum Bogen 1 gehörige Centriwinkel ist der q^{te} Theil eines Rechten.

Führt man dieses in die Gleichung (1 ein, welche sich in der Form

$$\sphericalangle\, \alpha = a \, \frac{R}{q}$$

schreiben läßt, so folgt

$$\sphericalangle\, \alpha = a \, m$$

Nimmt man nun, wie allgemein üblich ist, denjenigen Winkel zur **Einheit des Winkelmaßes**, welcher in dem mit der Längeneinheit beschriebenen Kreise als Centriwinkel zu dem Bogen von der Länge Eins gehört, setzt man somit m = 1, so folgt in diesem neuen Winkelmaße

$$\sphericalangle \alpha = a$$

d. h. der Winkel hat zum Maße die Anzahl der Längeneinheiten, welche der um seinen Scheitel mit der Längeneinheit beschriebene und von seinen Schenkeln begrenzte Bogen enthält.

Anmerkung. Durch die Einführung dieses Maßes ist der abstrakte Begriff der Umdrehung (21) auf den **concreten eines Kreisbogens von bestimmter Länge** zurückgeführt, und die Größe jeder Drehung durch den Weg gemessen, den ein in der Entfernung Eins vom Drehpunkte liegender Punkt während der Drehung zurücklegt.

Aufgaben: Wenn die Zahl π die Länge des mit dem Radius 1 beschriebenen Halbkreisbogens bezeichnet,

a) wie lang ist der Bogen, dessen Centriwinkel 1 R; 2 R; 3 R; 4 R; $\frac{1}{2}$ R ist, $22\frac{1}{2}^0$; 15^0; 275^0; $179^0\ 20'$; $0^0\ 15'\ 21''$; $10^0\ 0'\ 2'',3$; $n^0\ a'\ b''$ hat?

b) Wie viele R, wie viel Grade, Minuten, Sekunden hat der Bogen (Winkel):

$$\pi;\ \frac{\pi}{4};\ 2\pi;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{3}{2}\pi;\ \frac{179}{180}\pi;\ \frac{12}{\pi};\ 1{,}03\pi;\ 0{,}07\pi;\ \frac{a}{b}\pi?$$

107.

In den folgenden Paragraphen wird ein Maß für die auf den Kreis bezüglichen Winkel im Sinne von 106 Zus. 1 festgestellt, indem der Bogen angegeben wird, der mit dem betreffenden Winkel gleichviel Grade hat. Kennt man das Verhältniß dieses Bogens zu dem bei derselben Drehung mit dem Radius Eins beschriebenen Bogen, so ist damit auch das absolute Maß des Winkels gefunden. Winkel im Kreise.

108. Lehrsatz.

Der Peripheriewinkel hat zum Maße die Hälfte des Bogens, der zwischen seinen Schenkeln liegt. Oder: Peripheriewinkel.

Der Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.

Beweis ergibt sich für den Fall, daß ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht, aus 40 und 43; die übrigen Fälle werden durch eine Hilfslinie auf diesen zurückgeführt. Man beweise den Satz auch für stumpfe Peripheriewinkel!

Zusatz 1. Peripheriewinkel, die (in Kreisen von gleichen Radien) auf gleich großen Bögen stehen, sind einander gleich; und umgekehrt.

Zusatz 2. Der Peripheriewinkel, der auf dem Durchmesser steht, ist ein Rechter.

Zusatz 3. Gehen zwei aufeinander senkrechte Sehnen von einem Punkte der Peripherie aus, so liegen ihre beiden anderen Endpunkte und der Kreismittelpunkt in einer Geraden. 26 Zus. 1.

Zusatz 4. Es gibt weder außerhalb noch innerhalb des um eine Strecke (als Durchmesser) beschriebenen Kreises einen Punkt, in welchem zwei von den Endpunkten dieser Strecke ausgehende Gerade sich rechtwinklig schneiden; somit ist die über der Strecke (als Durchmesser) beschriebene Kreislinie der geometrische Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, welche jene Strecke zur Hypotenuse und Grundlinie haben.

109. Lehrsätze.

Winkel des Sehnenvierecks.

a) Sind die Seiten eines Vierecks Sehnen eines Kreises (ist ein Viereck einem Kreise eingeschrieben, Sehnenviereck), so sind je zwei gegenüberliegende Winkel des Vierecks supplementär.

b) Sind zwei gegenüberliegende Winkel eines Vierecks supplementär, so läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die 4 Ecken des Vierecks geht.

Beweis. Man beschreibe den Kreis um drei Ecken und zeige, daß das vierte Eck weder innerhalb noch außerhalb des Kreises liegen kann. 40. 109 a.

Zusatz. Um jedes rechtwinklige Parallelogramm und um jedes Antiparallelogramm läßt sich ein Kreis beschreiben.

110. Lehrsätze.

Tangentialwinkel.

a) Der Tangentialwinkel hat die Hälfte des von der Sehne überspannten Bogens zum Maße, oder: der Tangentialwinkel ist dem Peripheriewinkel gleich, der auf der Sehne steht.

Der Beweis wird zunächst für den spitzen Tangentialwinkel dadurch eingeleitet, daß man den Peripheriewinkel mit Rücksicht auf 99 b) construirt und dann 108 Zus. 2 anwendet.

Durch eine passende Construction läßt sich auch unmittelbar zeigen, daß der Tangentialwinkel der Hälfte des Centriwinkels gleich ist, der auf der Sehne steht.

b) Bildet der von dem Endpunkte einer Sehne aus den Kreis verlassende Strahl mit der Sehne einen Winkel, welcher dem auf der Sehne stehenden Peripheriewinkel gleich ist, so gehört der Strahl einer Tangente an.

Beweis mittelst der in a) angewandten Construction.

111. Lehrsatz.

Denkt man sich zwei Strahlen, die von den Punkten A_1, B_1 der Peripherie ausgehen, und dieselbe zum zweiten Male in den Punkten A_2, beziehungsweise B_2 schneiden, so ist das Maß für den Winkel (α) der beiden Strahlen immer durch die Bögen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gegeben; und zwar ist dieses Maß die halbe Summe dieser beiden Bögen, wenn sich die Strahlen im Kreise schneiden, hingegen die halbe Differenz derselben, wenn der Schnittpunkt außerhalb des Kreises liegt. Der Satz gilt auch dann, wenn die 4 Punkte in 3 oder 2 zusammenfallen. Durch Specialisirung erhält man folgende Sätze:

a) Der Winkel zweier Sehnen hat zum Maße die halbe Summe der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln und denen seines Scheitelwinkels liegen. Sehnenwinkel.

Beweis: Man verbinde die Endpunkte der Bögen durch eine dritte Sehne und wende 40 und 108 Zus. 1 an.

b) Der dem Kreise zugekehrte Winkel, welchen zwei Secanten mit einander bilden, hat zum Maße die halbe Differenz der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln liegen. Secantenwinkel.

Beweis wie zu a).

c) Der dem Kreise zugekehrte Winkel, welchen eine Secante mit einer Tangente bildet, hat zum Maße die halbe Differenz der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln liegen. Winkel der Secante und Tangente.

Beweis durch 40 und 110 a.

d) Der dem Kreise zugewendete Winkel zweier Tan- Tangentenwinkel.

genten hat zum Maße die halbe Differenz der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln liegen.

Anmerkung. In wiefern ist der Lehrsatz 108 ein besonderer Fall von 111?

112. Lehrsätze zur Uebung.

1) Liegt der Scheitel eines Winkels (α) in dem Sector des Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht (oder in der Grenze des Sectors), so ist der Winkel (α) größer als der Centriwinkel. 40.

2) Liegt der Mittelpunkt des Kreises in oder zwischen den Schenkeln eines Winkels (α) der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, so ist der Winkel (α) kleiner als der Centriwinkel und größer als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. 40.

3) Liegt der Scheitel eines Winkels (α) in dem Sector des Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht, so liegt der Mittelpunkt des Kreises im Winkelraume seines Scheitelwinkels (α'); und umgekehrt.

Beweis. Man bemerke zunächst, daß ein Punkt innerhalb eines Winkelraumes liegt, wenn der vom Scheitel des Winkels durch den Punkt gezogene Strahl den Winkel theilt, d. h. mit jedem der Winkelschenkel einen kleineren Winkel bildet als der andere Schenkel, und umgekehrt.

Verbindet man nun den Mittelpunkt des Kreises mit dem Scheitel des Winkels (α), so theilt der Strahl der Voraussetzung gemäß den Centriwinkel, folglich auch den Bogen, daher den Winkel (α), weil der ganze Bogen, somit auch der Theilpunkt, zwischen dessen Schenkeln liegt. Somit theilt der entgegengesetzte Strahl den Scheitelwinkel (27). Es geht also eine Theilungslinie des Scheitelwinkels (α') durch den Mittelpunkt des Kreises, w. z. b. w. Die Umkehrung wird ebenso bewiesen.

Zwei sich schneidende Sehnen.

4) Schneiden sich zwei Sehnen innerhalb eines Kreises in einem vom Mittelpunkte verschiedenen Punkte, so ist der Bogen b_1 zwischen den Schenkeln desjenigen Winkels (α), welcher den Mittelpunkt enthält, größer als der Bogen b_2 zwischen den Schenkeln seines Scheitelwinkels (α').

Beweis. Construirt man zu beiden Bögen die Centriwinkel C_1 und C_2, so ist $C_1 > \alpha$, also b_1 größer als das Bogenmaß des Winkels α; ferner $C_2 < \alpha'$, somit b_2 kleiner als das Bogenmaß des Winkels α'; nun ist $\alpha = \alpha'$, also haben diese Winkel den nämlichen Bogen zum Maße, folglich $b_1 > b_2$.

5) Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise so, daß zwischen den Schenkeln je zweier Scheitelwinkel gleiche Bögen liegen, so ist der Schnittpunkt der Sehnen der Mittelpunkt des Kreises.

6) Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise (außerhalb des Mittelpunktes) so, daß zwischen den Schenkeln zweier Scheitelwinkel gleiche Bögen liegen, so sind die Sehnen gleich groß. 108 Zus. 1. 49.

7) Schneiden sich zwei gleiche Sehnen im Kreise so liegen gleiche Bögen zwischen den Schenkeln derjenigen beiden Scheitelwinkel, deren Winkelräume den Mittelpunkt nicht enthalten.

8) Schneiden sich ungleiche Sehnen im Kreise, so sind die gegenüberliegenden Bögen ungleich; und umgekehrt.

9) Stehen zwei Sehnen auf einander senkrecht, so ergänzen sich die zwischen zwei Scheitelwinkeln liegenden Bögen zum Halbkreise; und umgekehrt.

10) Stehen zwei gleiche Sehnen auf einander senkrecht, so liegt je ein Quadrant zwischen den Schenkeln der beiden Scheitelwinkel, die den Mittelpunkt des Kreises nicht enthalten.

11) Die Halbirungslinie des Winkels, den zwei gleiche Sehnen bilden, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Der Satz bezieht sich offenbar nur auf denjenigen der vier Winkel, zwischen dessen Schenkeln der Mittelpunkt liegt, gilt übrigens für alle denkbaren Lagen des Sehnenschnittpunktes. Die Halbirungslinie der Supplemente dieses Winkels steht auf dem durch den Scheitel gezogenen Radius senkrecht.

12) Wird der Winkel zweier Sehnen von dem durch seinen Scheitel gezogenen Radius halbirt, so sind die Sehnen gleich groß.

13) Die Halbirungslinie des Winkels ungleicher Sehnen geht nicht durch den Mittelpunkt und umgekehrt.

14) Die Endpunkte gleicher Sehnen bestimmen im Allgemeinen ein Antiparallelogramm, und zwar bilden die Sehnen

a) die zwei Diagonalen des Antiparallelogramms, wenn sie sich im Kreise schneiden,

b) zwei Seiten des Antiparallelogramms, wenn sich ihre Verlängerungen schneiden.

Schneiden sich die Sehnen in der Peripherie, so reducirt sich das Antiparallelogramm auf ein gleichschenkliges Dreieck.

Zusätze: 1) Verbindet man die Endpunkte zweier gleichen Sehnen, die sich innerhalb des Kreises schneiden, so erhält man vier Dreiecke, von welchen zwei gleichschenklig, die beiden andern congruent sind.

2) Convergiren zwei gleiche Sehnen, so sind ihre Verlängerungen bis zum Durchschnittspunkte gleich groß.

15) Sind zwei Sehnen gleich und parallel, so bestimmen ihre Endpunkte ein Rechteck.

16) Die Diagonalen des (in den Kreis) eingeschriebenen Rechtecks gehen durch den Mittelpunkt des Kreises.

Vermischte Uebungssätze.

17) Beschreibt man um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis und verbindet die Ecken des Dreiecks mit einem beliebigen Punkte der Peripherie, so ist die mittlere der Verbindungsstrecken der Summe der äußeren gleich.

18) Beschreibt man um ein beliebiges Dreieck einen Kreis und fällt von einem Punkte der Peripherie Senkrechte auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die Fußpunkte dieser Senkrechten in einer Geraden. 26 Zus. 1. 108 Zus. 4. 109 b. 108 Zus. 1. 109 a.

19) Verbindet man die Fußpunkte der drei Höhen eines Dreiecks, so begrenzen die Verbindungsstrecken ein neues Dreieck, dessen Winkel durch jene drei Höhen halbirt sind.

Beweis. Man beschreibe Halbkreise über den Seiten des ursprünglichen Dreiecks und wende 108 Zus. 1 wiederholt an.

Gegenseitige Lage zweier Kreise.

113. Lehrsatz.

Aus den Sätzen 93 und 95 ergibt sich, daß zwei Kreise, die den Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie oder 3 Punkte der Peripherie gemeinschaftlich haben, sich weder der Größe noch der Lage nach von einander unterscheiden.

114. Erklärungen.

Zwei Kreise, die den nämlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrisch, Kreise von verschiedenen Mittelpunkten excentrisch. Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet, heißt Centrallinie oder Centrale.

115. Lehrsatz.

Zwei Schnittpunkte.

Zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten, wenn die Centrale (AB) zugleich kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden Radien ($r_1 > r_2$) ist.

Voraussetzung. $AB < (r_1 + r_2)$
$AB > (r_1 - r_2)$

Beweis. Man zeigt 1) daß der Endpunkt von r_2 innerhalb des Kreises um A liegt $(AB - r_2 < r_1)$; 2) daß der Endpunkt der um r_2 verlängerten Centrale außerhalb des Kreises um A liegt $(AB + r_2 > r_1)$. 96. 88b.

116. Lehrsatz.

Ist die Centrale gleich der Summe der Radien, so berühren sich die Kreise von außen, d. h. sie haben nur einen Punkt ihrer Peripherien gemeinschaftlich, während alle übrigen Punkte des einen Kreises außerhalb des anderen liegen. Berührung von außen.

Beweis. Da $BA - r_1 = r_2$ ist, so liegt der um r_1 vom Mittelpunkte A entfernte Punkt der Centrale zugleich in der Peripherie des Kreises um B.

Jeder andere Punkt (C) der einen Kreislinie (um B) liegt außerhalb des andern Kreises, wie sich indirekt durch 15 und die Voraussetzung ergibt.

117. Lehrsatz.

Ist die Centrale gleich der Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von innen, d. h. sie haben nur einen Punkt der Peripherien gemeinschaftlich, während alle übrigen Punkte des einen Kreises innerhalb des andern liegen. Berührung von innen.

Beweis. Da $AB + r_2 = r_1$, so liegt der auf der Verlängerung der Centrale um r_2 von B entfernte Punkt zugleich auf der Peripherie des Kreises um A. Jeder andere Punkt des Kreises um B liegt innerhalb des Kreises um A; denn nach 96 ist der als gemeinschaftlich nachgewiesene Punkt der beiden Kreise derjenige Punkt des Kreises um B, welcher von A am weitesten entfernt ist, und da diese Entfernung nur einen Radius (r_1) beträgt, so liegen die übrigen Punkte innerhalb des Kreises um A.

118. Lehrsatz.

Ist die Centrale größer als die Summe der Radien, so liegt jeder Punkt des einen Kreises außerhalb des andern Kreises. Ausgeschlossene Lage.

Zusatz. Die Differenz zwischen der Centrale und der

Summe der Radien $(AB - (r_1 + r_2))$ ist der kleinste Abstand beider Kreise.

119. Lehrsatz.

Eingeschlossene Lage.

Ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien $[AB < (r_1 - r_2)]$, so liegt jeder Punkt des Kreises, der den kleineren Radius hat, innerhalb des andern Kreises.

Beweis. Der von A am weitesten entfernte Punkt (der Endpunkt von $AB + r_2$) ist noch um weniger als einen Radius (r_1) von A entfernt.

Zusatz. Der kleinste Abstand der beiden Peripherien ist $r_1 - (AB + r_2)$, der größte Abstand $(BA + r_1) - r_2$.

Aufgabe. Um wie viel ist der größte Abstand der beiden Kreise größer als der kleinste?

120. Lehrsätze.

Der Berührungspunkt auf der Centrale.

Berühren sich zwei Kreise von außen (vergl. 116), so liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Beweis. Die Centrale muß beide Peripherien schneiden. Fielen diese Schnittpunkte nicht in einen zusammen, so wäre die Centrale um die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte größer oder kleiner als die Summe der Radien und wegen 118 und 115 1) Berührung ausgeschlossen.

121. Lehrsatz.

Berühren sich zwei Kreise von innen (vergl. 117), so liegt der Berührungspunkt in der Verlängerung der Centrale.

Beweis wie in 120 mittelst 119 und 115.

122. Lehrsätze zur Uebung.

1) Die im Berührungspunkte zweier Kreise an den einen Kreis gezogene Tangente ist auch Tangente an den anderen Kreis.
2) Haben zwei Kreise in einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente, so berühren sich die Kreise in diesem Punkte.
3) Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise steht auf der Centrale senkrecht und wird von derselben halbirt.
4) Zieht man von dem einen Durchschnittspunkte zweier Kreise aus die beiden Durchmesser, so liegen die Endpunkte dieser Durchmesser mit dem zweiten Durchschnittspunkte der Kreise in einer Geraden.
5) Beschreibt man um einen Punkt A der Peripherie des Kreises 1 einen zweiten Kreis und zieht durch denselben Punkt A im ersten Kreise einen Durchmesser AB, so

werden alle nach B hin gerichteten Sehnen des zweiten Kreises von der Peripherie des ersten Kreises halbirt.

Anhang.

Constructionen.

123. Allgemeines über Constructionsaufgaben.

Ausführung der Constructionen.

1) Die Ausführung der folgenden Aufgaben setzt voraus, daß man um einen gegebenen (oder beliebigen) Punkt mit gegebenem (oder beliebigem) Radius einen Kreis beschreiben und eine gerade Linie ziehen kann, sei es, daß diese durch 2 gegebene Punkte gehen, oder die Verlängerung einer schon gezogenen geraden Linie bilden soll.

Es läßt sich diese Voraussetzung mit Cirkel und Lineal allerdings mit Annäherung erfüllen, man vergesse indessen nicht, daß auch die Constructionen Kopf-, nicht Handarbeit sind, daß somit die Aufgabe als geometrische vollkommen gelöst ist, sobald sie auf die obigen beiden Voraussetzungen zurückgeführt d. h. angegeben ist, um welche Punkte, mit welchen Radien Kreise beschrieben, welche geraden Linien gezogen oder verlängert werden sollen. Eine möglichst genäherte Ausführung der Zeichnung kann indessen aus mancherlei Gründen sehr nützlich sein.

Unlösbare Aufgaben.

2) Eine Aufgabe ist im Allgemeinen unlösbar, wenn die Erfüllung der gestellten Forderungen mit einem Satze der Geometrie im Widerspruch steht.

Dahin gehören insbesondere überbestimmte Aufgaben, d. h. solche, bei welchen mehr Forderungen gestellt sind, als zugleich erfüllt werden können, so daß einer oder einigen derselben, wenn sie nicht von der Art sind, daß sie durch Erfüllung der übrigen ohne unser Zuthun, in Folge einer Beziehung zwischen den gegebenen Größen miterfüllt sind, nicht genügt werden kann. Z. B. Man soll durch eine Senkrechte, welche von einem Ecke eines gegebenen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gezogen wird, diese halbiren.

Bei jeder in bestimmten Maßzahlen gestellten Aufgabe kann man unbedingt über die Lösbarkeit entscheiden.

Determination. Ist die Aufgabe aber, wie gewöhnlich, nicht in bestimmten Maßzahlen, sondern allgemein gestellt, so hat sie in der Regel eine Determination, d. h. sie ist nur dann lösbar, wenn die allgemeinen Angaben selbst gewisse Bedingungen erfüllen (sich innerhalb gewisser Grenzen halten).

Beispiele:

a) Ein Dreieck zu construiren, welches 3 gegebene Strecken zu Seiten hat.

b) In einer gegebenen Geraden 2 Punkte zu finden, die von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben.

Die Determination, an sich eine vortreffliche Uebung, ist zur Vervollständigung des Beweises unerläßlich.

Eindeutige, mehrdeutige, unbestimmte Aufgaben. 3) Die lösbaren Aufgaben sind durch die gestellten Anforderungen

a) eindeutig bestimmt, wenn sie nur eine Lösung haben, d. h. wenn nur ein Endresultat allen gestellten Ansprüchen genügt. Verschiedene Wege zu diesem einzigen Ziele sind nicht ausgeschlossen.

b) mehrdeutig bestimmt, wenn sie mehrere Lösungen haben, d. h. wenn mehrere nicht congruente geometrische Gebilde allen gestellten Anforderungen genügen.

Beispiel: Ein Dreieck zu construiren, welches zwei gegebene Strecken als Seiten und einen gegebenen Winkel so enthalten soll, daß er der kleineren von diesen Seiten gegenüberliegt.

c) unbestimmt oder unendlich vieldeutig, wenn sie unendlich viele Lösungen zulassen. Z. B. Ein Dreieck von gegebener Grundlinie und Höhe zu construiren.

Die Lösung solcher Aufgaben führt auf geometrische Oerter.

Abtheilung der Aufgaben. 4) Die folgenden Aufgaben sind in drei Abtheilungen zusammengestellt.

Die erste Abtheilung enthält „Fundamentale Aufgaben," deren Lösungen so geläufig werden sollen, wie die Lehrsätze selbst, da sie die elementare Grundlage dieses Zweiges der Geometrie bilden und die unentbehrlichen Hilfsmittel für alle übrigen Ausführungen bieten.

Daran reihen sich „Geometrische Oerter," deren Wichtigkeit in demselben Sinne betont werden darf.

Endlich folgen „Uebungsaufgaben," denen ein Versuch zu einer allgemeinen Anleitung, und zur weiteren Erläuterung die vollständig durchgeführte Lösung einer Aufgabe vorausgeschickt ist.

Die Constructionsaufgaben sind mit fortlaufenden Nummern versehen, welche zur Unterscheidung von den übrigen mit einem vorgesetzten C citirt werden.

Erste Abtheilung.

124.

Fundamentale Aufgaben.

1. Ueber einer als Grundlinie gegebenen Strecke *Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke.*
   a) ein gleichschenkliges,
   b) ein gleichseitiges Dreieck zu construiren ($\frac{2}{3}$ R zu construiren).

   Lösung. Man beschreibe
   a) mit einem Radius, welcher länger ist als die Hälfte der gegebenen Strecke,
   b) mit der Strecke selbst

aus jedem der beiden Endpunkte der Strecke einen Kreis; der Schnittpunkt der beiden Kreise ist die Spitze des verlangten Dreiecks.

2. Eine gegebene Strecke (durch eine Senkrechte) zu halbiren, wenn *Halbirung einer Strecke.*
   a) auf beiden Seiten,
   b) nur auf einer Seite der Strecke Raum zur Ausführung ist.

   Lösung durch zwei gleichschenklige Dreiecke.

3. In einem gegebenen Punkte einer Geraden eine Senkrechte zu errichten. *Senkrechte.*

   Lösungen.
   a) Durch ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der gegebene Punkt die Mitte der Grundlinie ist.

b) Durch ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der gegebene Punkt Endpunkt der Grundlinie ist. Der eine Schenkel wird über die Spitze hinaus um seine eigene Länge verlängert. 78 1).

c) Man beschreibe um einen Punkt, der nicht in der gegebenen Geraden liegt, eine Kreislinie, die durch den gegebenen Punkt geht; durch ihren zweiten Schnittpunkt mit der Geraden ziehe man einen Durchmesser und verbinde den gegebenen Punkt mit dessen anderem Endpunkte. 108 Zus. 2.

Zusatz. Zu einem gegebenen Winkel das Complement zu construiren.

4. Von einem gegebenen Punkte aus auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Lösungen.

a) Durch zwei gleichschenklige Dreiecke, von deren einem der gegebene Punkt die Spitze ist, und deren gemeinschaftliche Grundlinie in der Geraden liegt.

b) Durch die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise.

c) Ziehe von dem Punkte nach der Geraden eine beliebige Schiefe, errichte über dieser als Durchmesser einen Halbkreis, und verbinde den zweiten Schnittpunkt desselben mit dem gegebenen Punkte. 108 Zus. 2.

Zusatz. Zu einem gegebenen Winkel den supplementären Winkel zu construiren, so daß er

a) den nämlichen,

b) einen beliebigen Punkt als Scheitel hat. 59 β.

Halbirung eines Winkels.

5. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Lösung. Durch zwei gleichschenklige Dreiecke, deren gemeinschaftliche Basis die zu dem gegebenen Winkel gehörige Sehne ist.

Zusatz. Durch Lösung dieser Aufgabe ist man im Stande $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{4}$ R; $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{6}$ R; $\frac{1}{2^n}$ R, $\frac{1}{3.2^n}$ R zu construiren. Die Dreitheilung des rechten Winkels kann auch durch C 1 b allein gemacht werden.

Die Hälfte eines gegebenen Winkels wird am einfachsten

dadurch construirt, daß man um seinen Scheitel einen Kreis beschreibt, und über den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen einen Peripheriewinkel stellt.

6. Einen gegebenen Winkel so zu zeichnen, daß ein gegebener Punkt sein Scheitel und ein gegebener Strahl der eine Schenkel wird. Antragen eines gegebenen Winkels.

Lösung. Sowohl um den Scheitel des gegebenen Winkels als um den neuen Scheitel beschreibe mit demselben Radius eine Kreislinie, und trage die zum gegebenen Winkel gehörige Sehne vom Schnittpunkte des Strahles aus ab. Vgl. auch C 4 Z.

Zusatz.
a) Die Summe,
b) Die Differenz zweier gegebenen Winkel zu construiren.

7. Durch einen gegebenen Punkt (A) zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu construiren. Parallele.

Lösungen.
a) Man verbinde den Punkt (A) mit der Geraden durch eine beliebige Schiefe und wende (mit Rücksicht auf 30 Z.) C 6 an,
b) durch C 4 und C 3.
c) Nachdem die Verbindungslinie (A B) wie in a) gezogen ist, schneide man vom Schnittpunkte (B) derselben aus eine beliebige Strecke B C auf der Geraden ab, beschreibe um A mit B C, um C mit B A einen Kreis, so ist die Verbindungsstrecke des Schnittpunktes beider Kreise mit A die verlangte Parallele. (Einfachste Art.)

Zusatz. Aus zwei gegebenen Strecken und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu construiren.

8. Eine gegebene Strecke in n gleiche Theile zu theilen. Theilung einer Strecke in n gleiche Theile.

Lösung. Man setze einen beliebigen Strahl an den einen Endpunkt der Strecke, trage auf diesem n Strecken von beliebiger, aber gleicher Länge (a) auf, verbinde den zweiten Endpunkt der Strecke (n a) mit dem zweiten Endpunkte der gegebenen Strecke

und ziehe zu dieser Verbindungslinie durch alle Theilpunkte der Strecke (n a) Parallele.

Beweis in 75 Zus. 2.

Dreieck. 9. Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:

a) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
b) Eine Seite und die zwei anliegenden Winkel;
c) Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel;
d) Die drei Seiten;
e) Zwei Seiten und der Winkel, welcher der größeren gegenüberliegt;
f) Zwei Seiten und der Winkel, welcher der kleineren gegenüberliegt. (Zweideutig.)

Kreis. 10. Einen Kreis zu beschreiben, der durch 3 gegebene Punkte geht.

Lösung durch 54.

Tangente. 11. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche

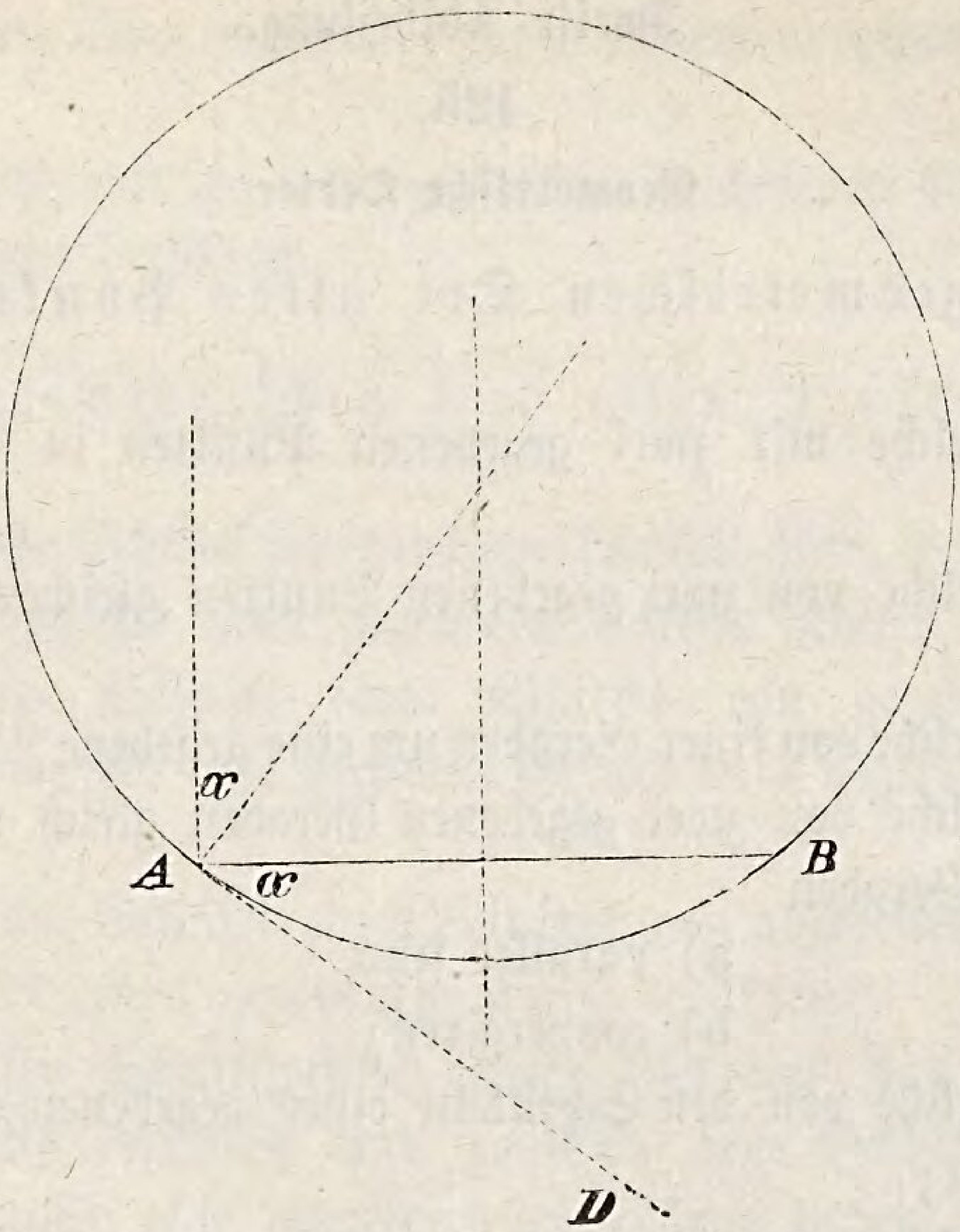
a) durch einen in der Peripherie,
b) durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt geht.

Lösungen.

Zu a). Man errichte im Endpunkte des Radius durch eines der in C 3 angegebenen Verfahren eine Senkrechte.

Zu b). Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte und beschreibe über der Verbindungsstrecke als Durchmesser einen Kreis. Die beiden Durchschnittspunkte der Kreislinien sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die von dem gegebenen Punkte aus an den Kreis gezogen werden können.

Gegebener Winkel einer gegebenen Strecke gegenüber. 12. Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Sehne (A B) so enthält, daß der auf dieser Sehne stehende Peripheriewinkel eine gegebene Größe (α) hat.



Lösungen. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muß zunächst in der senkrechten Halbirungslinie der gegebenen Sehne liegen.

a) Trägt man nun den gegebenen Winkel (α) an den einen Endpunkt (A) der Sehne so an, daß diese den einen Schenkel bildet, so besitzt nach 110 der Peripheriewinkel die verlangte Größe in einem Kreise, an welchem der zweite Schenkel (A D) des aufgetragenen Winkels Tangente ist. Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Senkrechte geht aber ebenfalls durch den Mittelpunkt.

Man errichte demnach auf dem zweiten Schenkel im Punkte A eine Senkrechte. Der Schnittpunkt derselben mit der senkrechten Halbirungslinie der Sehne ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

b) Man errichte in A eine zweite Senkrechte auf A B und ziehe eine Gerade, welche mit dieser den gegebenen Winkel α bildet. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der senkrechten Halbirungslinie ist der gesuchte Mittelpunkt.

Beweis durch 32 Z. und 108.

Zweite Abtheilung.

125.

Geometrische Oerter.

Den geometrischen Ort aller Punkte zu construiren,

13. welche mit zwei gegebenen Punkten in gerader Linie liegen;

14. welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen haben;

15. welche von einer Geraden um eine gegebene Länge abstehen;

16. welche von zwei gegebenen Geraden gleich weit abstehen, wenn diese Geraden

a) parallel sind,

b) convergiren;

17. welche von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleich weit abstehen;

18. welche von einem Punkte um eine gegebene Länge entfernt sind;

19. welche von der Peripherie eines Kreises um eine gegebene Länge abstehen;

20. welche von einem gegebenen Strahle ebensoweit abstehen, als ihre Projection vom Anfangspunkte des Strahles entfernt ist;

21. welche von einem gegebenen Strahle halb so weit entfernt sind, als vom Anfangspunkte desselben.

Die Lösung ist ein Strahl, welcher mit dem gegebenen einen Winkel von 30^0 bildet.

Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu suchen,

22. welche mit gegebenem Halbmesser beschrieben sind und durch einen gegebenen Punkt gehen;

23. welche durch zwei gegebene Punkte gehen;

24. welche eine der Lage nach gegebene Strecke als Sehne fassen;

25. welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und ein der Größe nach gegebenes Stück einer gegebenen Geraden als Sehne fassen;

26) welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren;

27) welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und eine gegebene Gerade berühren.

Den geometrischen Ort aller Punkte zu construiren,

28) welche Scheitel eines rechten Winkels sind, dessen Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen;

29) welche Scheitel eines Winkels von gegebener Größe sind, dessen Schenkel eine gegebene Gerade in 2 gegebenen Punkten schneiden;

30) welche Scheitel eines Winkels von gegebener Größe sind, dessen Schenkel einen gegebenen Kreis berühren;

31) welche Schnittpunkte zweier Geraden sind, die einen gegebenen Kreis berühren und zwischen dem Schnittpunkte und Berührungspunkte eine vorgeschriebene Länge haben.

Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise zu construiren,

32) welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren;

33) welche mit gegebenem Halbmesser beschrieben sind und einen gegebenen Kreis

a) von außen,

b) von innen berühren;

34) welche, mit gegebenem Radius beschrieben, den Umfang eines gegebenen Kreises halbiren;

35) welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und mit einem gegebenen Kreise eine Sehne von gegebener Länge gemeinschaftlich haben;

36) welche von zwei parallelen Geraden Sehnen von gegebener Länge (a, b) abschneiden.

Dritte Abtheilung.

126.

Allgemeine Anleitung zur Lösung von Constructionsaufgaben.

Man analysirt zunächst die Aufgabe, indem man sich dieselbe gelöst denkt, und als Anhaltspunkt seiner Gedanken eine provisorische Zeichnung entwirft, der man alle verlangten Eigenschaften der Lösung zuschreibt.

In möglichst engem und beziehungsreichem Anschlusse an die fertig gedachte Lösung suche man die gegebenen Bestimmungsstücke durch solche Constructionen herzustellen, deren Ausführung bereits bekannt ist.

Ist dieses gelungen, so hat man jedenfalls eine Art möglicher Verbindungen zwischen dem Gegebenen und Gesuchten dadurch hergestellt, daß man einen Weg vom Gesuchten zum Gegebenen, also zunächst einen Rückweg gefunden hat. Es erübrigt einen gesicherten Hinweg zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke suche man durch Anwendung geometrischer Lehrsätze auf das in der Zeichnung dargestellte Gebilde feste Beziehungen zwischen den gegebenen Größen und den gesuchten oder Bestimmungsstücken der gesuchten Größen, bedenke indessen dabei, daß nicht nur die ausdrücklich erwähnten Stücke gegeben sind, sondern auch alle jene Größen, die durch die erwähnten mitbestimmt sind. [Ist z. B. ein Punkt und ein Winkel gegeben, so ist die Länge der Senkrechten bekannt, die von dem Punkte aus nach den Schenkeln des Winkels gezogen werden, die Verbindungsstrecke des Punktes mit dem Scheitel u. s. w.]

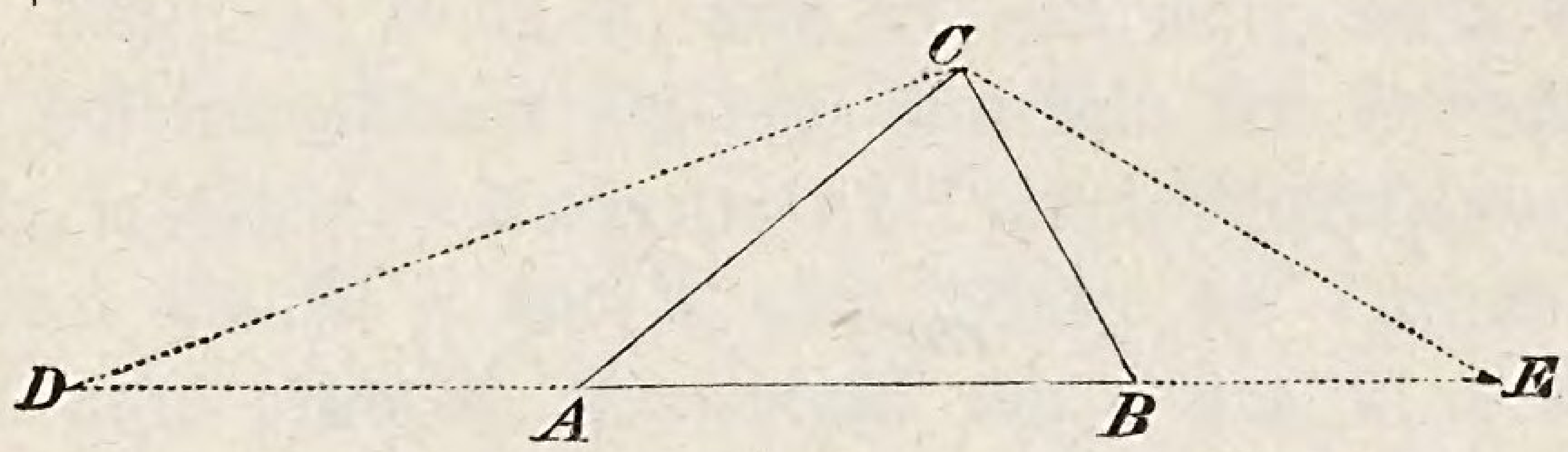
Hat man solche Beziehungen gefunden, die zur Bestimmung des Gesuchten durch das Gegebene vollkommen ausreichen, so beginne man (der größeren Sicherheit wegen am besten an einer neuen Zeichnung) in Gedanken oder mit Lineal und Cirkel die Construction selbst, indem man nun von den gegebenen Größen ausgeht.

Häufig ergibt es sich, daß die Lösung einer Aufgabe von dem Auffinden eines Punktes abhängt, der mehre Bedingungen zugleich erfüllen soll. Ein solcher Punkt wird als Schnittpunkt

geometrischer Oerter gefunden, von denen jeder einer der zu erfüllenden Bedingungen genügt.

127. Beispiel.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck construirt werden, von welchem der Umfang (die Strecke a) und zwei Winkel (α und β) gegeben sind.



Anleitung zur Analyse. Man zeichne (aus freier Hand) irgend ein Dreieck ABC und nehme an, sein Umfang (AB + BC + CA) sei der gegebenen Strecke a gleich, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$.

Da der Umfang in Form einer Strecke (a) gegeben ist, so suche man denselben in dieser Form herzustellen, und lege deßhalb AC in die Verlängerung von BA, BC in die Verlängerung von AB, so ist ED = a.

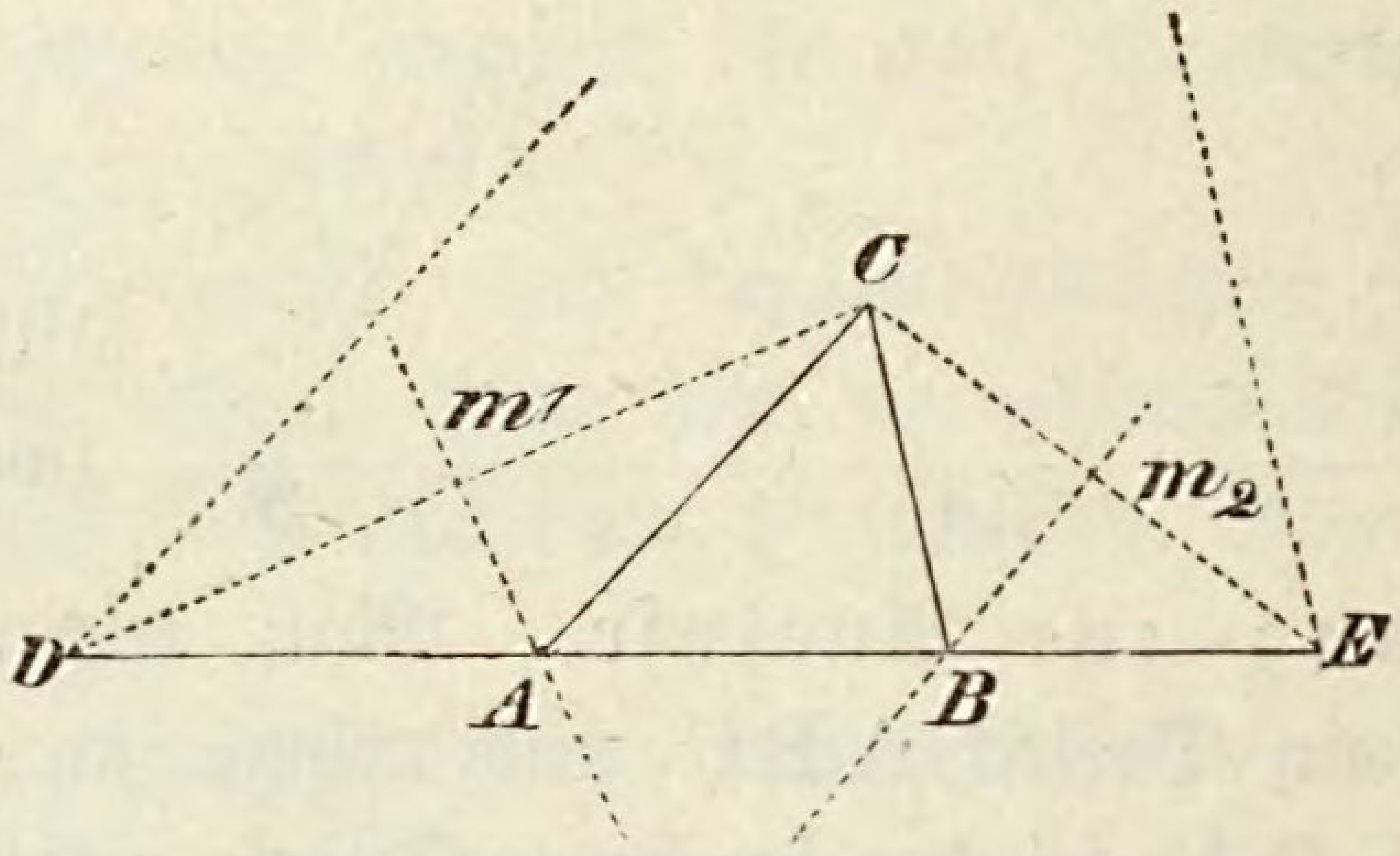
Diese Art der Herstellung von a hat das Eigenthümliche, daß sie die zwei gleichschenkligen Dreiecke DAC und EBC liefert, und darf deßhalb als „beziehungsreicher" angesehen werden, wie eine andere Abwickelung des Umfangs.

Nun erkennt man einerseits, daß die Winkel dieser beiden gleichschenkligen Dreiecke bekannt sind, da die Winkel an den Ecken A und B Nebenwinkel der beiden gegebenen Winkel sind, und daß insbesondere $\sphericalangle D = \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle E = \frac{1}{2}\beta$ ist, andererseits, daß der Endpunkt C des gesuchten Dreiecks zugleich Endpunkt des nun völlig bestimmten Dreiecks DEC ist. Dasselbe wird durch C 6, C 5 erhalten.

Für die beiden anderen Endpunkte AB kann die Erwägung maßgebend sein, daß sie Spitzen gleichschenkliger Dreiecke sein sollen, die über den bekannten Grundlinien CD und CE stehen, und daß sie zugleich in der Geraden DE liegen müssen. Sie sind folglich die Schnittpunkte der senkrechten Halbirungslinien von CD und CE mit dem Umfange.

Construction. Man mache die Strecke DE = a, trage

an D (als Scheitel) den gegebenen Winkel α, an E auf derselben Seite von ED den gegebenen Winkel β an, halbire beide Winkel und verlängere die Halbirungslinien bis zu ihrem Durchschnittspunkte (C). Halbire die Strecke DC und EC durch Senkrechte. Diese schneiden die DE in den Punkten A und B. Ziehe die Strecken AC, BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.



Beweis. Zu beweisen ist:

1) Die Voraussetzung der Construction, daß der Schnittpunkt C existirt, sowie daß die Schnittpunkte A und B vorhanden sind und auf der Strecke DE liegen.
2) Daß ein Winkel des Dreiecks ABC die Größe α, ein anderer die Größe β hat.
3) Daß $AB + BC + CA = a$ ist.

Zu 1). Da $\alpha + \beta < 2R$ (Determination), so ist umsomehr $\frac{\alpha+\beta}{2} < 2R$ und die Geraden DC und EC schneiden sich auf der Seite der Geraden DE, auf welcher die Winkel angetragen wurden.

$$\text{Da } \alpha < 2R, \frac{\alpha}{2} < R,$$

$$\text{so ist } \sphericalangle A m_1 D + m_1 D A < 2R;$$

$$\text{und wegen } \frac{\beta}{2} < R$$

$$\sphericalangle B m_2 E + m_2 E B < 2R;$$

also sind auch die Schnittpunkte A und B erwiesen.

Ferner liegt A als zweiter Schnittpunkt der Geraden $m_1 A$ mit dem Umfange des Dreiecks DEC, in DE, weil wegen $\frac{\alpha+\beta}{2} < R$, $\sphericalangle m_1 CE$ stumpf ist, deßhalb CE und $m_1 A$ rechts

von C m_1 divergiren, und folglich der zweite Schnittpunkt nicht in CE liegen kann. Ebenso B.

Zu 2). Wenn B näher als A an E liegt, so hat der Beweis $\sphericalangle$ ABC $= \beta$, $\sphericalangle$ BAC $= \alpha$ keine Schwierigkeit, weil diese Winkel Außenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke BEC, ADC und zugleich Winkel des Dreiecks ABC sind. Läge aber A näher als B an E, was der Fall wäre, wenn die senkrechten Halbirungslinien sich noch innerhalb des Dreiecks CED schnitten, so wären die Außenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke, also unsere Winkel α und β nicht Winkel des Dreiecks ABC, sondern dieses hätte die Nebenwinkel von α und β zu Winkeln. Ebendeßhalb aber ist diese Lage der Punkte A und B unmöglich; denn da $\alpha + \beta < 2R$, so ist die Summe ihrer Nebenwinkel größer als 2R, folglich können diese nicht zugleich Winkel eines Dreiecks sein.

Zu 3).

$$\begin{aligned} AB &= AB \\ BC &= BE \\ CA &= AD \end{aligned}$$

$$AB + BC + CA = AB + BE + AD = DE = a.$$

Die Determination $\alpha + \beta < 2R$ ist schon beim Beweise als wesentlich erkannt worden.

128.

Vermischte Uebungsaufgaben.

37) Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Radius hat, durch einen gegebenen Punkt geht, und dessen Mittelpunkt *Zur Einübung der geometrischen Oerter.*
 a) in einer gegebenen Geraden,
 b) im Umfange eines gegebenen Kreises liegt.

38) Einen Kreis zu beschreiben, der durch 2 gegebene Punkte geht und
 a) einen gegebenen Radius hat,
 b) seinen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden hat,
 c) seinen Mittelpunkt im Umfange eines gegebenen Kreises hat.

39) Um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der von einer gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge abschneidet.

40) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben,
 a) der durch einen gegebenen Punkt geht und von einer gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge abschneidet,

b) der von einer gegebenen Geraden AB eine Sehne von gegebener Länge abschneidet, und dessen Mittelpunkt
α) in einer gegebenen Geraden,
β) in der Peripherie eines gegebenen Kreises liegt.

41) In einem gegebenen Kreise eine Sehne zu ziehen,
a) welche von einem gegebenen Punkte der Peripherie ausgeht und einen vorgeschriebenen Abstand vom Mittelpunkte hat (2 Arten der Lösung);
b) welche durch einen Punkt innerhalb des Kreises geht und eine vorgeschriebene Größe hat;
c) welche unter allen durch einen gegebenen Punkt gehenden Sehnen die kleinste ist;
d) welche in diesem Punkte halbirt wird;
e) welche eine bestimmte Größe und Richtung hat (letztere ist etwa dadurch gegeben, daß sie einer gegebenen Geraden parallel laufen, auf derselben senkrecht stehen oder einen andern gegebenen Winkel mit ihr bilden soll);
f) welche von einer schon gezogenen Sehne halbirt wird und mit dieser einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

42) Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, von dem ein Bogen gegeben ist.

43) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher von zwei gegebenen Geraden Sehnen von gegebener Länge abschneidet.

44) Einen Kreis zu beschreiben, welcher von zwei gegebenen parallelen Geraden Sehnen von gegebener Länge abschneidet und
a) durch einen gegebenen Punkt geht,
b) seinen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden hat.

45) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher mit zwei gegebenen Kreisen Sehnen von bestimmter Länge gemeinschaftlich hat.

46) Die gemeinschaftliche Spitze zweier gleichschenkligen Dreiecke zu finden, deren Grundlinien zwei gegebene Strecken sind.

Gemischte Methode.

47) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie gleiche Stücke von den Schenkeln eines gegebenen Winkels abschneidet.

48) Ein Winkel und ein Punkt sind gegeben; man soll durch diesen eine Gerade so ziehen, daß sie mit den Schenkeln gleiche Winkel bildet.

49) Man soll einen Punkt finden, der von 2 gegebenen Geraden die vorgeschriebenen Entfernungen a und b hat.

50) Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so

ziehen, daß sie von zwei anderen gegebenen Punkten gleichen Abstand hat.

Zwei Lösungen. 61 Zus. 2. — 49.

51) Eine Gerade und zwei Punkte außerhalb sind gegeben; man soll in der Geraden einen Punkt finden, der so liegt, daß die von ihm nach den zwei gegebenen Punkten gezogenen Strecken mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden.

Lösung. Man verlängere die Projicirende eines der gegebenen Punkte um ihre eigene Länge.

52) In einem Dreiecke soll zu einer Seite eine Parallele so gezogen werden, daß die Summe der dieser Seite anliegenden Abschnitte gleich der gezogenen Parallelen wird.

53) In einer Seite eines Dreiecks ist ein Punkt gegeben; man soll durch ihn eine Transversale so ziehen, daß sie der Summe derjenigen zwei von ihr gemachten Abschnitte gleich wird, welche der nicht geschnittenen Seite anliegen.

Lösung. Der zweite Endpunkt der Transversale wird als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks gefunden.

54) Die beiden Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Grundlinien hinaus so zu verlängern, daß die Verbindungslinien der Endpunkte jeder der beiden Verlängerungen gleich wird.

55) Die Halbirungslinien des Winkels zu finden, den zwei schwach convergente Strecken bilden.

Lösung. a) Man konstruire den Winkel durch C 7 und analysire durch 53.
b) Durch 56 a. Welchen Vorzug hat diese zweite Lösung vor der unter a) angedeuteten?

56) Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so ziehen, daß sie mit zwei gegebenen Geraden, deren Verlängerung bis zum Durchschnitte unmöglich ist, gleiche Winkel bildet.

57) In einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu finden, der von den beiden andern Seiten gleich weit absteht.

58) Einen Punkt zu construiren, der gleich weit von allen 3 Seiten eines Dreiecks absteht.

59) Auf einer Seite eines Dreiecks ist ein Punkt gegeben; man soll durch ihn eine Gerade so nach der Verlängerung einer zweiten Seite ziehen, daß die von diesen zwei Seiten begrenzte Strecke von der dritten Seite halbirt wird. 61 d. Analysis durch Lehrsätze.

60) Durch einen innerhalb eines gegebenen Winkelraumes liegenden

Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß das von den Schenkeln begrenzte Stück derselben

a) durch den gegebenen Punkt halbirt wird (61 d);

b) einem Schenkelabschnitte gleich wird.

61) Durch einen außerhalb eines gegebenen Winkelraumes liegenden Punkt eine Strecke nach dem einen Schenkel so zu ziehen, daß sie von dem andern Schenkel halbirt wird.

62) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß das Stück derselben, welches von zwei gegebenen Parallelen begrenzt wird, eine vorgeschriebene Länge erhält. 61 c.

63) Eine gegebene Strecke zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels so zu legen, daß sie mit einem Schenkel einen gegebenen Winkel bildet (einer gegeb. Geraden || läuft).

64) Drei gegebene Strecken so zusammenzustellen, daß sie von einem Punkte auslaufen, während ihre anderen Endpunkte in einer Geraden liegen und auf dieser zwei gleich lange Strecken begrenzen. 61 d.

65) Man soll einen Punkt im Umfange eines gegebenen Dreiecks so bestimmen, daß die durch ihn gezogenen, den Seiten parallelen Transversalen einander gleich werden. 65.

66) Von zwei unbekannten Winkeln ist die Summe ($= \sphericalangle\, \alpha$) und die Differenz ($= \sphericalangle\, \beta$) bekannt, die Winkel sollen durch Construction gefunden werden.

Construction von Dreiecken.

129. Rechtwinklige Dreiecke.

Rechtwinklige Dreiecke.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck construiren, wenn gegeben sind:

67) Die Hypotenuse und eine Kathete;

68) Eine Kathete und die zur Hypotenuse gehörige Höhe;

69) Die Hypotenuse und die zu ihr gehörige Höhe;

70) Eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und der anderen Kathete;

71) Die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten;

72) Eine Kathete und die Differenz der Hypotenuse und der anderen Kathete;

73) Die Hypotenuse und die Differenz der beiden Katheten;

74) Ein spitzer Winkel und die Hypotenuse;

75) Ein spitzer Winkel und die Summe der Hypotenuse und einer Kathete;

76) Ein spitzer Winkel und die Differenz der Hypotenuse und einer Kathete;

77) Ein spitzer Winkel und die Summe der beiden Katheten;

78) Ein spitzer Winkel und die Differenz der beiden Katheten;
79) Ein spitzer Winkel und der Umfang.

130. Gleichschenklige Dreiecke.

Das gleichschenklige Dreieck ist gegeben, wenn eines der rechtwinkligen Dreiecke bekannt ist, welches von einer Höhe des gleichschenkligen abgeschnitten wird.

Demnach lassen sich die Constructionsaufgaben über gleichschenklige Dreiecke auf Constructionen von rechtwinkligen Dreiecken zurückführen. Man versuche dieses an den folgenden drei Aufgaben.

Es soll ein gleichschenkliges Dreieck construirt werden, wenn gegeben sind: Gleichschenklige Dreiecke.

80) Der Schenkel und die dazu gehörige Höhe;
81) Der Schenkel und die Summe der anliegenden Winkel;
82) Der Umfang und der Winkel an der Spitze.

Versuche, durch Uebertragung der Aufgaben 67—79 auf das gleichschenklige Dreieck weitere Aufgaben zu formuliren!

Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist: Gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke.

83) Die zur Hypotenuse gehörige Höhe;
84) Der Umfang;
85) Die Differenz zwischen der Summe der Katheten und der Hypotenuse $[(k_1 + k_2) - h]$.

86) Formulire Constructionsaufgaben über das gleichseitige Dreieck aus den Angaben der Aufgaben 67—85! Gleichseitige Dreiecke.
87) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, dessen Ecken in drei gegebenen parallelen Geraden liegen.

Lösung. Man denke sich um das Dreieck einen Kreis beschrieben. 108 Zus. 1.

131. Allgemeine Dreiecke.

In einem Dreiecke seien a, b, c die Seiten, A, B, C die denselben gegenüberliegenden Winkel, h_a, h_b, h_c die zu ihnen gehörigen Höhen, m_a, m_b, m_c die von den Ecken nach den Mittelpunkten der Seiten (a, b, c) gezogenen Transversalen, w_a, w_b, w_c die Halbirungslinien der Winkel A, B, C, $y > x$ die Projectionen der Seiten b und c auf a. Unter einem Zeichen wie $\sphericalangle (m_a b)$ ist der Winkel verstanden, den die Richtungen der Strecken m_a und b mit einander bilden.

Allgemeine Dreiecke.

Das Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:

88. $(a + b), c, B$
89. $(a + b), c, C$
90. $(a + b), c, A$
91. $(a + b), A, B$
92. $(a - b), c, B$
93. $(a - b), c, C$
94. $(a - b), c, A$
95. $(a - b), A, B$
96. $(a + b + c), A, B$
*97. $(a + b - c), A, C$
98. $(a - b), C, (A - B)$
*99. $(a + b), c, (A - B)$
*100. $(a - b) c, (A - B)$
101. $a (A + B - C), (A - B + C)$

102. a, b, h_a
103. a, h_a, B
104. a, h_a, h_b
105. a, h_b, A
106. a, h_b, B
*107. h_a, h_c, C
108. a, h_b, h_c

109. $(b + c), A, h_b$
*110. $(b + c), B, h_a$
*111. $(b + c), B, h_b$
112. $(b - c), A, h_b$
113. $(b - c), B, h_a$
114. $(b - c), C, h_a$
115. $(b - c), C, h_b$
116. $(b - c), a, h_c$
117. $(b + c), a, h_b$
118. $(b - c), a, h_b$

---

* Die mit Sternchen bezeichneten Aufgaben dürfen vielleicht mit Rücksicht auf die Reihenfolge als die schwierigeren betrachtet werden.

119. $a, h_b, (B - C)$
120. $c, h_a, (A - C)$
121. $b, h_a, (B - C)$
122. $b, h_c, (B - C)$
123. $(a + b + c), h_a, B$
124. $a, (b + h_a), C$
125. $a, (b - h_a), C$

126. x, y, h_a
127. x, y, b
128. x, y, B
129. x, y, h_b
130. x, b, h_a
131. x, b, c
132. x, b, B
133. x, b, C
134. x, c, C
135. x, c, A
136. x, h_b, C
*137. x, h_b, B
*138. x, h_b, A
139. x, h_b, c
140. x, h_a, h_b

141. $y, (b - c), C$
*142. $y, (a - c), C$
*143. $y, (a + b + c), C$
144. $(x + h_a), c, A$
145. $(x + h_a), b, B$
146. $(x + h_a), b, C$
147. $(x + h_a)\ B, C$
148. $(h_a - x), c, A$
149. $(h_a - x), c, C$
150. $(h_a - x), b, B$
151. $(h_a - x), b, C$
152. $(h_a - x), B, C$

*153. $(y - x), \quad b, c$

*154. $(y - x)$, b, C
*155. $(y - x)$, b, B
*156. $(y - x)$, b, h_a
157. $(y - x)$, c, h_a
158. $(y - x)$, h_a, B
159. $(y - x)$, h_a, C
*160. $(y - x)$, h_b, C
161. $(y - x)$, B, C
*162. $(y - x), (B - C), b$
*163. $(y - x), (B - C), (b + c)$
*164. $(y - x), (B - C), (b - c)$
*165. $h_a, (c - x), (b - y)$

*166. m_a, a, h_b
167. m_a, b, h_b
168. m_a, c, h_b
169. a, h_b, w_b
170. a, h_b, w_c
171. a, w_b, B
*172. h_a, w_a, A
173. w_a, B, C
174. w_a, h_b, A
175. a, w_c, B
176. h_a, w_a, B
*177. $(a + c), B, \sphericalangle (a\, h_b)$
*178. m_a, c, $\sphericalangle (b\, m_a)$
*179. m_a, b, A
*180. m_a, h_b, A

**181. a, h_a, A
182. a, m_a, A
183. h_a, h_b, A
184. a, h_b, h_c
185. a, h_a, h_b
186. a, A, $(b + c)$
*187. a, $h_a\, m_b$

** Die folgenden Aufgaben werden mit Hilfe des Kreises gelöst.

188. x, y, A
189. a, b, ∢ (c m_a)
190. a, h_a ∢ (c m_a)
* 191. a, m_b, A
* 192. b, h_b ∢ (c m_a)
* 193. m_a, h_a, A
194. h_a, (y — x), (B — C)
195. y, x, (B — C)
196. a, ∢ (b m_a), ∢ (c m_a)
* 197. b, m_a, B
198. b, m_a, A.

Ein Dreieck zu construiren, von welchem zwei Seiten bekannt sind, und von welchem man überdies weiß, daß der von den bekannten Seiten eingeschlossene Winkel
199) Gleich der Summe der beiden andern Winkel ist,
200) Gleich der Differenz,
201) Gleich der halben Summe,
202) Gleich der doppelten Summe,
203) Gleich dem dritten Theile der Summe,
204) Gleich der dreifachen Summe der beiden andern Winkel ist.

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, von welchem gegeben sind: *Ein Dreieck in den Kreis einzuschreiben.*

205. A, h_a
206. A, m_a
207. b, h_a
208. b, m_a
209. A, B
210. a, (B — C)
* 211. h_a, (B — C)
212. B, (b — c)
213. A, (b + c)
214. A, (b — c)
* 215. h_a, w_a.

Construction von Vierecken.

132. Parallelogramme.

In einem Parallelogramme bezeichnen a, b zwei anliegende Seiten, A > B zwei anliegende Winkel, D_a, D_b die zwei diese *Allgemeine Parallelogramme.*

Winkel durchschneidenden Diagonalen, h_a den Abstand der Parallelen a, h_b den Abstand der Parallelen b.

Man soll ein Parallelogramm construiren, wenn gegeben sind:

216. D_a, D_b, h_a
217. b, h_a, D_b
218. $(a + b)$, B, D_b
219. $(a + b)$, h_a, D_b
220. $(a + h_a)$, b, B
221. $(a - b)$, B, D_b
222. $(a - b)$, D_b, h_a
223. $(D_b - a)$, b, B
224. $(D_b - a)$, b, h_a
225. $\sphericalangle (D_a D_b)$, D_b, h_a
226. $\sphericalangle (D_a D_b)$, $(D_a + D_b)$, a
227. $\sphericalangle (D_a D_b)$, $(D_b - D_a)$, a
228. $(A - B)$ $(a - b)$ D_b
229. a, h_a, h_b
230. D_b, h_a, h_b
231. $(h_a + D_b)$, $\sphericalangle (b D_b)$, A.

Anmerkung. Da ein Parallelogramm bestimmt ist, wenn man eines der Dreiecke kennt, welche durch die Diagonalen abgeschnitten werden, so läßt sich mit Rücksicht auf das Gesagte aus jeder der vorstehenden auf Construction von Dreiecken bezüglichen Aufgaben (67—204) auch eine Aufgabe bilden, welche die Construction eines Parallelogrammes verlangt.

Rechtecke. Ein Rechteck zu construiren, von welchem gegeben sind:

232) Eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der Diagonalen;

233) Der Umfang und die Summe einer Seite und Diagonale.

Anmerkung. Sämmtliche Aufgaben über Construction von rechtwinkligen Dreiecken und von Parallelogrammen lassen sich in solche über Construction von Rechtecken umformen.

Rauten. Eine Raute zu construiren, wenn gegeben sind:

234) Seite und Diagonale;

235) Seite und Höhe;

236) Diagonale und Höhe;

237) beide Diagonalen;

238) die Summe der Diagonalen und der größere Winkel;
239) die Seite und die Differenz der Diagonalen;
240) die größere Diagonale und die Differenz der Winkel.

Anmerkung. Die Aufgaben über Construction von rechtwinkligen oder gleichschenkligen Dreiecken, sowie über Parallelogramme im Allgemeinen können leicht in Aufgaben über die Raute umgeformt werden.

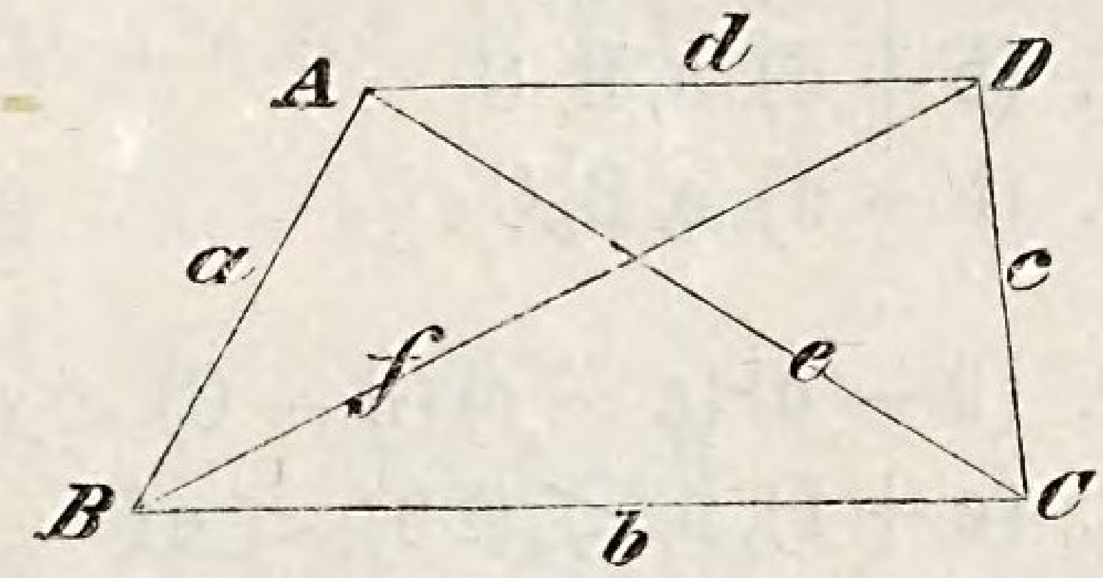
Ein Quadrat — Quadrate.

241) aus der Summe } der Seite und Diagonale
242) aus der Differenz } der Seite und Diagonale

zu construiren.

133. Trapeze.

In einem Trapeze sollen die Parallelen mit $b > d$, ihr Abstand mit h, die nicht parallelen Seiten mit a und c bezeichnet sein; die Winkel, welche von den Seiten (a u. b), (b u. c), (c u. d), (d u. a) eingeschlossen sind, heißen beziehungsweise B, C, D, A, die Diagonalen BD, AC sind mit f und e bezeichnet.



Ein Trapez zu construiren, wenn gegeben sind: — Trapeze.

243. a, b, c, d
244. a, b, B, D
245. a, b, d, C
246. b, d, B, C
247. a, c, e, C
248. b, e, B, C
249. b, d, e, C
*250. b, d, e, f

251. h, a, b, c
252. h, b, c, d
253. h, a, e, f
254. h, b, d, C
255. h, b, e, C
256. h, e, f, C

257. ∢(fb), a, b, d
258. ∢(fb), ∢(fa), b, d
259. ∢(fc), a, c, B
260. ∢(ef), a, b, h
*261. ∢(ef), ∢(fa), e, f
262. ∢(ea), ∢fa), e, f

263. (a + b), c, d, e
264. (a + b), c, d, B
265. (a + b), c, d, D
266. (a + b), h, e, f
267. (a + b), h, c, B
*268. (a + b), d, B, C
269. (b — a), c, d, D
270. (b — a), c, d, B
271. (b + d), a, c, B
272. (b + d), a, e, B
273. (b + d), a, B, C
274. (b — d), e, B, C

*275. (b — d) (a — c) (B — C) ∢(fb)
*276. (e + f), b, ∢(fb), ∢ef
*277. (e — f), b, ∢(fb), ∢ef
278. (a + b + c), d, A, D
*279. (a + b + c + d) h, B, D
*280. (a + b + c — d), f, B, C.

Antiparallelogramm.

Ein Antiparallelogramm zu construiren, wenn bekannt sind:

281. a, b, c
282. a, b, B
283. b, c, B
284. a, b, e
285. a, e, B
286. b, e, B

134. Trapezoide.

Allgemeine Vierecke.

Ein Trapezoid zu construiren, wenn analoge Bezeichnung gilt und gegeben sind:

287. a, c, A, B, C
288. e, a, b, c D
289. e, a, c, A, B
290. e, a, c, B, D
291. e, f, a, b, c

292. ∢ (ef), e, f, a, b
293. ∢ (ef), e, a, b, c
*294. ∢ (fa), ∢ (fc), a, c, e
*295. ∢ (fc), ∢ (ce), a, e, f
*296. ∢ (fe), ∢ (eb), ∢ (ed), e, f
*297. ∢ (fe), ∢ (fb), a, e, f
*298. ∢ (fe), ∢ (fa), b, e, f
299. ∢ (ea), ∢ ed, ∢ ec), ∢ (fd), a

300. a, b, d, (A + B), (C — D)
301. a, b, c, ∢ ec, (B + C)
*302. a, c, e, f, (B + C)

303. (a + b), c, d, e, A
304. (a + b), c, e, f, B
305. (a — b), c, e, f, B
306. (a + b), c, d, A, B
307. (a — b), c, d, A, B
308. (a + b), c, d, A (C + D)
309. (a + b), e, f, ∢ (fa), ∢ (ef)
*310. (a + c), e, f, ∢ (ea), (B + C)
*311. (a — c), e, f, ∢ (ea), (B + C)
*312. a, c, (e + f), ∢ (ef), (B + C)
313. (a + b), (c + d), A, B, C.

135. Sehnenvierecke.

Ein Sehnenviereck zu construiren, wenn die bisherige Bezeichnung gilt und gegeben sind: Sehnenvierecke.

314. a, e, ∢ (fa), ∢ (fc)
*315. e, f, ∢ (fa), ∢ (eb)
316. e, f, D, ∢ (ef)
317. a, b, e (c + d)
318. a, b, e, (c — d).

In einen gegebenen Kreis ein Viereck einzuschreiben, von welchem gegeben sind:

319. e, f, ∢ (ef)
320. e, A, ∢ (ef)
321. a, b, (c + d)
322. a, b, (c — d)
323. (a + b), e, f
324. (a — b), e, f
325. ∢ (ea), ∢ (eb), ∢ (ec)
326. a, ∢ (ec), ∢ (ef)
327. a, c, C
*328. a, c, (B + C).

136. Berührungs-Aufgaben.

Berührung einer Geraden mit einem Kreise von gegebenem Radius.

329. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

330. An einen gegebenen Kreis Tangenten zu ziehen, welche eine vorgeschriebene Richtung haben, (indem sie entweder einer gegebenen Geraden parallel laufen, oder auf ihr senkrecht stehen, oder einen gegebenen Winkel mit ihr bilden).

331. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt und der eine zweite gegebene Gerade berührt.

332. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

333. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade berührt und von einer zweiten gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge abschneidet.

334. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei convergirende Gerade berührt.

335. Von einer Geraden aus soll an einen gegebenen Kreis die kürzeste Tangente gezogen werden.

336. Der Durchmesser eines Kreises ist bis zu einem gegebenen Punkte A verlängert. Man soll auf der Verlängerung einen Punkt B bestimmen, der so liegt, daß die von ihm an den Kreis gezogene Tangente der Strecke AB gleich wird.

Lösung: Die Analysis zeigt, daß die von A nach dem Berührungspunkte gezogene Secante Hypotenuse ist.

337. Einen Punkt zu bestimmen, der so liegt, daß die von ihm an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gleiche und vorgeschriebene Längen erhalten.

338. In einer gegebenen Geraden soll ein Punkt so bestimmt werden, daß die von ihm an einen gegebenen Kreis gezogene Tangente eine gegebene Länge erhält.

339. Man soll einen Punkt so bestimmen, daß die beiden von ihm aus an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangenten mit der Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

340. Einen Punkt so zu bestimmen, daß die Bögen, welche zwischen den Berührungspunkten der von ihm aus an den Kreis gezogenen Tangenten liegen, sich wie 1 : 2 verhalten.

341. Um einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden einen Kreis zu beschreiben, der die Gerade berührt. Von zu bestimmendem Radius.

342. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

343. Eine Strecke ist der Lage und Größe nach gegeben, ferner eine mit ihr parallele Gerade; man soll einen Kreis beschreiben, der die Strecke als Sehne faßt und die Gerade berührt.

344. Innerhalb zweier Parallelen einen Kreis zu beschreiben, der beide berührt und durch einen zwischen den Parallelen gegebenen Punkt geht.

345. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei convergente Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt.

346. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Parallele und eine dieselben schneidende Gerade berührt.

347. Um zwei gegebene Punkte zwei Kreise zu beschreiben, die sich Berührung zweier Kreise.

a) von außen,

b) von innen berühren.

348. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt. Bei gegebenem Radius.

349. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt.

350. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und dessen Mittelpunkt

a) in einer gegebenen Geraden,

b) in der Peripherie eines gegebenen Kreises liegt.

351. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt.

352. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

353. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt

a) beide einschließend,

b) beide ausschließend,

c) den einen einschließend, den andern ausschließend.

354. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und von einer gegebenen Geraden eine gegebene Sehne abschneidet.

Bei zu bestimmendem Radius.

355. Um einen gegebenen Punkt einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt.

356. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

357. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Gerade und einen diese Geraden berührenden Kreis berührt,

a) wenn die Geraden parallel sind,

b) wenn die Geraden convergiren.

358. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und eine gegebene Gerade berührt.

359. Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte und einen gegebenen Kreis berührt.

360. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt, der die Gerade in einem gegebenen Punkte schneidet und einen gegebenen Kreis berührt.

361. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise

von außen, und zwar den größern in einem gegebenen Punkte berührt.

362. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise, und zwar den größeren von außen in einem gegebenen Punkte berührt, während er den kleineren berührend einschließt.

363. Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene gleich große Kreise berührt.

364. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, welche die Centrale nicht schneidet. Gemeinschaftliche Tangente.

365. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, welche die Centrale schneidet.

366. Man soll eine Gerade so ziehen, daß die zwei von zwei gegebenen Punkten auf sie gefällten Perpendikel zwei gegebenen Strecken gleich werden.

367. In ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, der die drei Seiten berührt. Umschriebene Dreiecke.

368. Die drei einem Dreiecke angeschriebenen Kreise zu construiren.

369. Ein Winkel und ein Punkt sind gegeben; man soll von diesem aus eine Gerade so ziehen, daß sie mit den Winkelschenkeln ein Dreieck von gegebenem Umfange bildet. 105 7.)

370. Man soll von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Dreiecks aus durch eine Gerade von zwei Seiten des Dreiecks Stücke abschneiden, deren Summe gleich der Transversale ist. Analysis durch 369.

371. Es sind drei Punkte gegeben, man soll einen Kreis so konstruiren, daß die drei von diesen Punkten aus an ihn gezogenen Tangenten gleich groß werden (unbestimmt).

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, wenn gegeben sind:

372. ein Winkel und dessen Halbirungstransversale;

373. eine Seite und die zu einer anderen Seite gehörige Höhe;

374. ein Winkel und die Summe einer anliegenden und der gegenüberliegenden Seite;

*375. ein Winkel und die zur gegenüber liegenden Seite gehörige Höhe;

*376. eine Höhe und die von demselben Ecke aus gehende Winkelhalbirungstransversale.

Tangentenvierecke. Ein Tangentenviereck zu construiren, wenn die für die Vierecke oben eingeführte Bezeichnung gilt, und gegeben sind:

377. a, b, c, e

378. a, b, e, A

379. a, A, B, C

380. $a, b, (c + d), A$

381. $a, b, (c + d), e$.

382. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, wenn eine Seite, ein anliegender Winkel und die ihm gegenüberliegende Diagonale gegeben sind.

Zweiter Theil.

Der Flächeninhalt der Figuren.

I. Abschnitt.

Bestimmungsstücke der Größe.

137. Erklärungen.

Flächenmaß. Die Aufgabe: die Größe einer ebenen Figur anzugeben, führt zunächst zur Aufstellung eines Flächenmaßes.

Man ist übereingekommen, als Flächeninhalt dasjenige Quadrat anzunehmen, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Da wir das Meter als Längeneinheit angenommen haben, so ist unsere Flächeneinheit das Quadratmeter ($\square^{m}$).

Theilt man zwei anliegende Seiten dieses Quadrats, jede in 10 gleiche Theile (Decimeter) und zieht durch die Theilpunkte Parallele zu den Seiten, so wird das Quadratmeter in 10.10 Quadrate zerlegt, deren Seiten Decimeter sind, so daß 1 Quadratmeter 100 Quadratdecimeter ($\square^{dm}$) enthält.

Ebenso ergibt sich, daß ein Quadratdecimeter 100 Quadratcentimeter ($\square^{cm}$), und ein Quadratcentimeter 100 Quadratmillimeter ($\square^{mm}$) enthält.

$$1 \square^{m} = 100 \square^{dm} = 10000 \square^{cm} = 1000000 \square^{mm}.$$

Das Quadratdekameter ($\square^{Dm}$), welches 100 $\square^m$ hat, und Ar (are, Acker) genannt wird, ist als kleineres Feldmaß üblich, während das Quadrathektometer ($\square^{Hm}$) = 10000 $\square^m$ = 100 Ar, und deßhalb Hektar genannt, zur Messung größerer Feld- und Waldflächen angewendet wird.

Aeltere Flächenmaße sind, auf den Fuß als Längeneinheit gegründet: der Quadratfuß ($\square'$), der in 144 Quadratzoll ($\square''$) oder (144.144) Quadratlinien ($\square'''$) getheilt ist; die Quadratklafter = 36 $\square'$; die Quadratruthe ($\square^0$) = 144 $\square'$; das Tagwerk und der Morgen, als Feldmaße, mit sehr verschiedenen Werthen, z. B.:

Ein bayerisches Tagwerk (= 40000 b. $\square'$) = 34,07 Ar.
Ein preußischer Morgen (= 180 pr. $\square$ Ruthen) = 25,53 Ar.
Die (geographische) Quadratmeile.

138. Erklärungen.

Präcisirung der Aufgabe.

Die sofort erkannte Unmöglichkeit, jede ebene Figur, welche Form sie auch haben mag, unmittelbar durch ein Quadrat zu messen, d. h. durch Probiren zu untersuchen, wie oft ein gewähltes Quadrat auf der Fläche aufgetragen oder in dieselbe eingezeichnet werden kann, andererseits die schon im ersten Theile gewonnene Erkenntniß, daß Figuren durch Linien allein oder Linien und Winkel vollkommen, d. h. nach Größe und Form bestimmt werden können, heißt uns die Fragen aufwerfen:

1) Durch welche Merkmale ist die Größe einer Figur vollkommen bestimmt? Oder, was dasselbe ist, welche Bestimmungsstücke zweier Figuren müssen gleich sein, damit die Figuren selbst gleiche Größe haben?
2) In welcher Weise ist die Größe der Figur durch diese ihre Merkmale bestimmt, d. h. welche arithmetische Operationen sind mit den Maßzahlen der Bestimmungsstücke auszuführen, damit dadurch die Anzahl der in der fraglichen Figur enthaltenen Flächeneinheiten erhalten wird?

Durch die Congruenzfälle und die aus denselben gezogenen Schlüsse sind nun für jede der bisher betrachteten Figuren schon Merkmale bekannt, welche zur Bestimmung des Flächeninhaltes derselben jedenfalls vollkommen hinreichen. Da aber durch

jene Merkmale zugleich die Form der Figur mitbestimmt ist, diese aber bei der Frage nach der Größe ganz außer Acht gelassen werden kann, so ist zu erwarten, daß jene Merkmale zur Bestimmung des Flächeninhaltes nicht sämmtlich erforderlich sind.

Im Folgenden wird die Untersuchung auf die Abhängigkeit des Inhaltes von der Länge von Strecken beschränkt.

139. Lehrsatz.

Bestimmungsstücke der Größe des Parallelogramms.

Die Größe eines Parallelogramms ist durch eine seiner Seiten (Grundlinie) und den Abstand derselben von der ihr gegenüberliegenden Seite bestimmt; oder: (Zwei) Parallelogramme sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

Beweis. Man legt die Parallelogramme mit ihren Grundlinien auf einander, dann fallen die gegenüberliegenden Seiten in die Gerade, welche durch die Endpunkte der beiden Höhen bestimmt ist (34). Diese Seiten haben dann entweder einen Punkt gemeinschaftlich oder nicht. Im ersteren Falle sind die nicht gemeinschaftlichen Theile der Parallelogramme congruent, im letzteren hat man zu diesen nicht gemeinschaftlichen Theilen noch dasselbe Dreieck zu addiren, um dadurch congruente Dreiecke zu erhalten.

140. Lehrsatz.

Die Größe des Dreiecks.

Die Größe eines Dreiecks ist durch eine Seite und die zu derselben gehörige Höhe bestimmt; oder: (Zwei) Dreiecke sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

Beweis. Man ergänze jedes der (beiden) Dreiecke zu dem durch dasselbe bestimmten Parallelogramme, so daß die als gleich bekannten Grundlinien Seiten der Parallelogramme werden. Die so erhaltenen Parallelogramme sind gleich (139), folglich auch die Dreiecke (61a).

Zusatz 1. Dreiecke sind gleich groß, wenn sie eine gemeinschaftliche Grundlinie haben und ihre Spitzen in einer zur Grundlinie parallelen Geraden liegen.

Zusatz 2. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, mit welchem es gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beweis. Man ergänze das Dreieck zum Parallelogramme und wende 139 und 61a an.

Zusatz 3. Die Größe eines Polygons ist bestimmt, wenn die Größe der einzelnen Dreiecke bestimmt ist, in welche es durch

die von einem Ecke aus gezogenen Diagonalen zerlegt wird, z. B. die Größe eines Vierecks durch eine Diagonale und die von den gegenüberliegenden Ecken auf dieselbe gefällten Senkrechten.

141. Lehrsatz.

Die Größe eines Trapezes ist bestimmt durch seine Höhe und die Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten verbindet. Oder: Die Größe des Trapezes.

Trapeze sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und Mittelinien haben.

Beweis. Man construire zu jedem der Trapeze ein Parallelogramm wie in 74b und beweise durch die Congruenz der nicht gemeinschaftlichen Theile, daß das Trapez dem Parallelogramme gleich ist. Die Gleichheit der Parallelogramme folgt aus 139.

Zusatz. Ein Trapez ist einem Parallelogramme gleich, welches mit ihm gleiche Höhe und die Mittelinie des Trapezes zur Grundlinie hat.

142. Uebungssätze.

1) Ein Dreieck ist einem Parallelogramme gleich, das bei gleicher Höhe die halbe Grundlinie, oder bei gleicher Grundlinie die halbe Höhe des Dreiecks hat. Uebungen.

2) Zieht man durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten die Verbindungsstrecke und zwei beliebige Parallele nach der dritten Seite, so entsteht ein Parallelogramm, welches halb so groß ist wie das Dreieck.

3) Verbindet man die Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks, so entstehen drei Parallelogramme, deren jedes halb so groß ist als das Dreieck.

4) Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen vier Parallelogramme, von denen diejenigen gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht.

5) Zieht man durch einen beliebigen Punkt innerhalb eines Parallelogramms Strecken nach den vier Endpunkten, so entstehen vier Dreiecke, von welchen je zwei gegenüberliegende zusammen halb so groß sind wie das Parallelogramm.

6) Zieht man durch einen beliebigen Punkt außerhalb eines Parallelogramms Strecken nach den vier Endpunkten, so entstehen

über den Seiten des Parallelogramms vier Dreiecke, von denen zwei sich zur Hälfte des Parallelogramms ergänzen, während die Differenz der beiden andern ebenfalls halb so groß ist wie das Parallelogramm.

Die Untersuchung wird mit Hilfe einer Parallelen geführt, die man zu einem Seitenpaare durch den Punkt zieht.

7) Das Parallelogramm, welches seine vier Ecken in den Mittelpunkten der vier Seiten eines Vierecks hat, ist halb so groß wie dieses Viereck.

8) Halbirt eine Diagonale des Vierecks die andere Diagonale, so halbirt sie auch das Viereck. 140.

9) Halbirt man zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks und verbindet die Halbirungspunkte mit zwei sich gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein Viereck, welches halb so groß ist als das gegebene.

Beweis. Durch Ziehen einer Diagonale wird 140 anwendbar.

10) Das Dreieck, welches entsteht, wenn man die Endpunkte einer der nicht parallelen Seiten des Trapezes mit dem Mittelpunkte der andern verbindet, ist die Hälfte des Trapezes.

11) Durch die Strecke, welche die Mittelpunkte der parallelen Seiten eines Trapezes verbindet, wird dasselbe in zwei gleiche Theile getheilt. 141.

II. Abschnitt.

Verhältniß der Flächen.

143. Lehrsatz.

Verhältniß der Rechtecke.

Die Flächen zweier Rechtecke (R_1 und R_2), welche eine Seite (a) gleich haben, verhalten sich wie die beiden andern Seiten (b_1 und b_2).

Erläuterung. Die Fläche R_2 ist ebenso oft in der Fläche R_1 enthalten, als die Länge b_2 in b_1:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2}.\text{*)}$$

Beweis. a) Sind die beiden Seiten b_1 und b_2 com-

*) Ausführlicheres über Proportionen in Nr. 163.

mensurabel, so daß es eine dritte Länge (l) gibt, welche in beiden ohne Rest enthalten ist, so denke man sich diese Länge so oft als möglich (n_1- beziehungsweise $n_2$mal) auf den beiden Seiten abgetragen und errichte in jedem Theilpunkte eine Senkrechte; so werden die Rechtecke R_1 und R_2 in kleinere Rechtecke (ϱ) getheilt, welche (nach 139) alle gleich groß sind. Nun ist

$$R_1 = n_1\varrho, \quad b_1 = n_1 l;$$
$$R_2 = n_2\varrho, \quad b_2 = n_2 l;$$

woraus durch Division erhalten wird

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{n_1}{n_2};$$

$$\text{somit } \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

b) Sind die Längen b_1 und b_2 incommensurabel, so wird der Beweis indirekt ganz analog geführt wie in 106.

Wäre nämlich für diesen Fall die Proportion

$$R_1 : R_2 = b_1 : b_2$$

unrichtig, so könnte sie jedenfalls durch Einsetzen einer anderen Länge b_3 für b_2 richtig gemacht werden, so daß

$$R_1 : R_2 = b_1 : b_3$$

richtig wäre. Es kann aber b_3 weder größer noch kleiner als b_2 sein. Denn wäre z. B.

$$b_3 < b_2$$

also $b_2 - b_3$ eine bestimmte Länge β, so läßt sich (z. B. durch fortgesetzte Halbirungen) b_1 in so kleine Theile theilen, daß jeder Theil (l) kleiner als β wird, und trägt man diese Theile nun auf b_2 an, so fällt wenigstens ein Theilpunkt zwischen den Endpunkt von b_3 und den von b_2, und bildet den Endpunkt einer Länge b_4, so daß $b_3 < b_4 < b_2$ ist.

Das zur Grundlinie b_4 construirte Rechteck $R_4 < R_2$ hat eine zu b_1 commensurable Grundlinie, und es gilt nach dem in a) bereits Bewiesenen:

$$R_1 : R_4 = b_1 : b_4$$

$$\text{oder } \frac{R_1}{b_1} = \frac{R_4}{b_4}, \text{ dazu aus}$$

$$\text{der Voraussetzung: } \frac{R_1}{b_1} = \frac{R_2}{b_3},$$

gibt: $\frac{R_4}{R_2} = \frac{b_4}{b_3}$, was unmöglich ist, weil

$\frac{R_4}{R_2}$ ein ächter, $\frac{b_4}{b_3}$ aber ein unächter Bruch ist.

Ganz ähnlich kann die Unmöglichkeit der Annahme

$$b_3 > b_2$$

dargethan werden.

144. Lehrsatz.

Die Flächen zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte anliegender Seiten.

Behauptung. $R_1 : R_2 = (a_1 b_1) : (a_2 b_2.)$

Beweis. Man denke sich ein Hilfs-Rechteck R mit den Seiten a_1 und b_2, so ist nach 143:

$$R_1 : R = b_1 : b_2,$$
$$R : R_2 = a_1 : a_2;$$

daraus folgt durch Multiplikation die Behauptung.

145. Lehrsatz.

Verhältniß der Parallelogramme.

Die Flächen zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Behauptung. Hat das Parallelogramm P_1 die Grundlinie g_1 und die Höhe h_1, das Parallelogramm P_2 die Grundlinie g_2 und die Höhe h_2, so gilt

$$P_1 : P_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2).$$

Beweis. Denkt man sich zwei Rechtecke R_1 und R_2, deren anstoßende Seiten beziehungsweise g_1, h_1 und g_2, h_2 sind, so gilt

$$R_1 : R_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2).$$

Diesen Rechtecken können die Parallelogramme substituirt werden.

Zusätze. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien; Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

146. Lehrsatz.

Verhältniß der Dreiecke.

Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Behauptung. Hat das Dreieck $\triangle_1$ die Grundlinie g_1

und die Höhe h_1, das Dreieck $\triangle_2$ die Grundlinie g_2 und die Höhe h_2, so gilt

$$\triangle_1 : \triangle_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2).$$

Beweis. Die behauptete Proportion gilt für Parallelogramme, welche dieselben Dimensionen haben:

$$P_1 : P_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2)$$

woraus auch $\frac{P_1}{2} : \frac{P_2}{2} = (g_1 h_1) : (g_2 h_2)$ folgt.

Da nun $\triangle_1 = \frac{P_1}{2}$ und $\triangle_2 = \frac{P_2}{2}$, so folgt die Behauptung durch Substitution.

Zusätze. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien; Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

147. Lehrsätze.

Verhältniß der Trapeze.

a) Trapeze verhalten sich wie die Produkte aus ihren Mittelinien und Höhen.

b) Trapeze von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Mittelinien.

c) Trapeze, welche gleich große Mittelinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

148. Lehrsätze.

Verhältniß von Parallelogrammen und Dreiecken mit gleichen oder supplementären Winkeln.

a) Zwei Parallelogramme, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

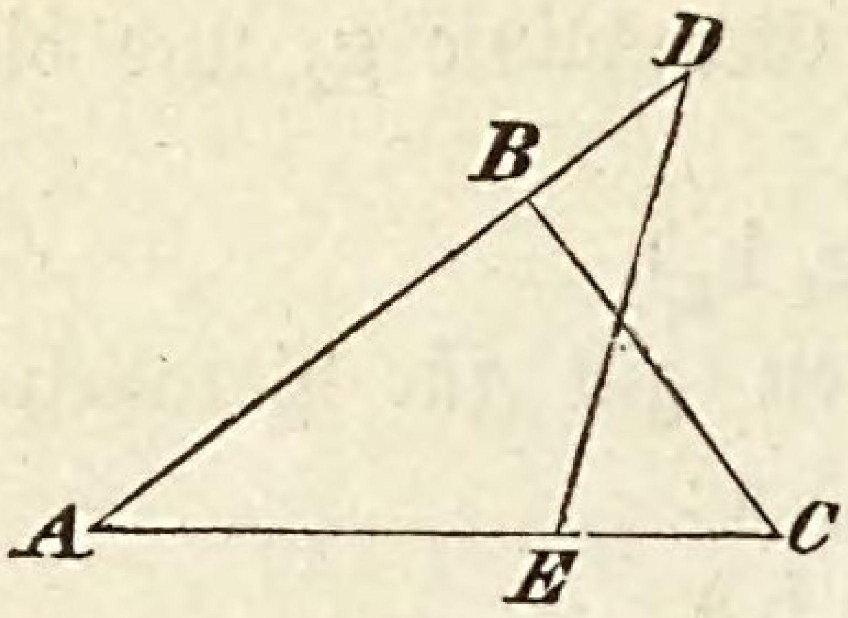
Behauptung. Sind P_1 mit den Seiten a_1 und b_1, P_2 mit den Seiten a_2 und b_2 die in Rede stehenden Parallelogramme, so gilt:

$$P_1 : P_2 = (a_1 b_1) : (a_2 b_2).$$

Beweis. Man construire ein Hilfsparallelogramm, welches den gleichen Winkel und die Seiten a_1 und b_2 hat, wende 145 Z. zweimal an, so erhält man durch passende Verbindungen der Gleichungen das Behauptete.

b) Zwei Dreiecke, welche einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Behauptung. $\triangle ABC : \triangle AED = (AB . AC) : (AD . AE.)$



Beweis. Man führt den Satz entweder mit Hilfe von 140 Zus. 2 auf a) zurück, oder beweist ihn unmittelbar, indem man die Dreiecke so aufeinanderlegt, daß sie den gleichen Winkel gemeinschaftlich haben.

Dann wird ein Hilfsdreieck, welches man sich durch Ziehen der Strecken BE oder DC verschafft, unter Anwendung von 146 Z. mit den beiden gegebenen Dreiecken verglichen. Durch passende Verbindung der so erhaltenen Gleichungen eliminirt sich das Hilfsdreieck.

c) Zwei Dreiecke, welche zwei supplementäre Winkel haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Beweis. Man legt die Dreiecke so an einander, daß die supplementären Winkel einen gestreckten bilden und verfährt dann analog wie in b).

Zusatz. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, wenn es mit demselben einen Winkel und die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten gleich hat.

Lehrsatz. Die beiden Dreiecke, in welche ein Viereck durch eine Diagonale getheilt wird, verhalten sich wie die Abschnitte der anderen Diagonale.

Beweis durch 146 Z., 148b, 148b, 5.

III. Abschnitt.

Maß der Flächen.

149. Maß des Rechtecks.

Inhalt des Rechtecks.

Vergleicht man das Rechteck, dessen Seiten a und b sind, mit dem Quadrate Q von der Seite q, so ist nach 144

$$R : Q = (ab) : (qq),$$

$$\text{oder } R = \left(\frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q}\right) . Q.$$

Ist nun die Seite q die Längeneinheit, so ist Q die Flächeneinheit, und der Satz lautet in Worten:

Man erhält die Anzahl der in einem Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die beiden

Zahlen, welche angeben, wie oft die Längeneinheit in den zwei Seiten des Rechtecks enthalten ist, mit einander multiplicirt.

Dieses ist der vollständige Sinn des durch die Annahme $q = 1$, $Q = 1$ abgekürzten Ausdruckes

$$R = ab,$$

(in Worten) der Inhalt eines Rechtecks ist dem Produkt zweier anstoßenden Seiten gleich.

Zusatz 1. Man erhält die Maßzahl für die Fläche eines Quadrates, wenn man die Maßzahl seiner Seite mit 2 potenzirt.*)

Zusatz 2. Sind a und b Maßzahlen von Strecken, so kann man immer unter ab den Flächeninhalt des aus den Strecken construirten Rechtecks und unter a^2 den Flächeninhalt des über der Strecke von der Länge a errichteten Quadrates verstehen.

Somit muß den analytischen Umformungen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

eine geometrische Bedeutung zukommen, welche leicht abgelesen werden kann.

Zur Uebung kann der Beweis dieser Sätze auch rein geometrisch geführt werden.

150. Lehrsatz.

Man erhält die Anzahl der in einem Parallelogramme enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die Maßzahlen seiner Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt. (Der Inhalt eines Parallelogramms ist dem Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich.) Inhalt des Parallelogramms.

Beweis. Sind g und h die Maßzahlen für Grundlinie und Höhe des Parallelogramms P, so ist es nach 139 einem Rechtecke R gleich, dessen anstoßende Seiten die Länge g und h haben, da nun nach 149:

$$R = gh,$$
$$P = R;$$

so folgt $\overline{P = gh.}$

*) Aus diesem Grunde pflegt man auch in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat der Zahl zu nennen.

Zusätze. 1) Der Inhalt eines Rhombus ist dem halben Produkte seiner Diagonalen gleich.

Zum Beweise dient eine Parallele zu einer Diagonale.

2) Der Inhalt eines Quadrats ist halb so groß, als das Quadrat über seiner Diagonale.

151. Lehrsatz.

Inhalt des Dreiecks.

Man erhält die Anzahl der in einem Dreiecke enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die Maßzahlen seiner Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und das erhaltene Produkt durch 2 dividirt. (Der Inhalt eines Dreiecks ist dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich.)

Beweis. Sind g und h die genannten Maßzahlen, so ist das Dreieck (△) die Hälfte des Parallelogramms P, welches eben diese Dimensionen hat. Da nun nach 150

$$P = gh, \frac{P}{2} = \frac{gh}{2}, \text{ und } \frac{P}{2} = \triangle, \text{ so folgt}$$

$$\triangle = \frac{gh}{2}.$$

Zusatz 1. Der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist dem halben Produkte der Katheten gleich.

Zusatz 2. Der Inhalt eines beliebigen Polygons wird erhalten, wenn man nach der gegebenen Regel den Inhalt aller Dreiecke berechnet, in welche das Polygon durch die von einem Ecke aus gezogenen Diagonalen zerlegt wird, und die so erhaltenen Zahlen addirt. — So findet man z. B. den Inhalt eines Vierecks, wenn man die Länge einer Diagonale mit der Summe der Senkrechten multiplicirt, welche von den zwei gegenüberliegenden Ecken auf die Diagonale gefällt sind.

152. Lehrsatz.

Inhalt des Trapezes.

Man erhält die Anzahl der in einem Trapeze enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die halbe Summe der beiden Parallelen mit der Maßzahl der Höhe multiplicirt. (Der Inhalt eines Trapezes ist dem Produkte aus dem arithmetischen Mittel der Parallelen in die Höhe gleich.)

Behauptung. Sind b und d die Maßzahlen für die beiden Parallelen, h die Maßzahl der Höhe, so ist der Inhalt T des Trapezes

$$T = \frac{b + d}{2} h.$$

Beweis. $\frac{b + d}{2}$ ist nach 74b die Länge der Mittelinie des Trapezes. 141 Z. Auch durch zweimalige Anwendung von 151.

IV. Abschnitt.

Beziehung zwischen den Dimensionen eines Dreiecks.

153. Erklärung.

Aus dem vorigen Abschnitte ist ersichtlich, daß der Flächeninhalt der Dreiecke, Parallelogramme ... in sehr einfacher Weise von 2 Bestimmungsstücken, der Grundlinie und Höhe, abhängig ist. Es bleibt somit die Frage zu lösen, wie in denjenigen Fällen, in welchen diese zwei Bestimmungsstücke nicht selbst gegeben, aber durch andere gegebene Strecken bestimmt sind, Grundlinie und Höhe aus den gegebenen Bestimmungsstücken berechnet werden können. Dazu ist nöthig, die Dimensionen der Figuren zu einander in bestimmte, mittelst Gleichungen darstellbare Beziehungen zu bringen. Präcisirung der Aufgabe.

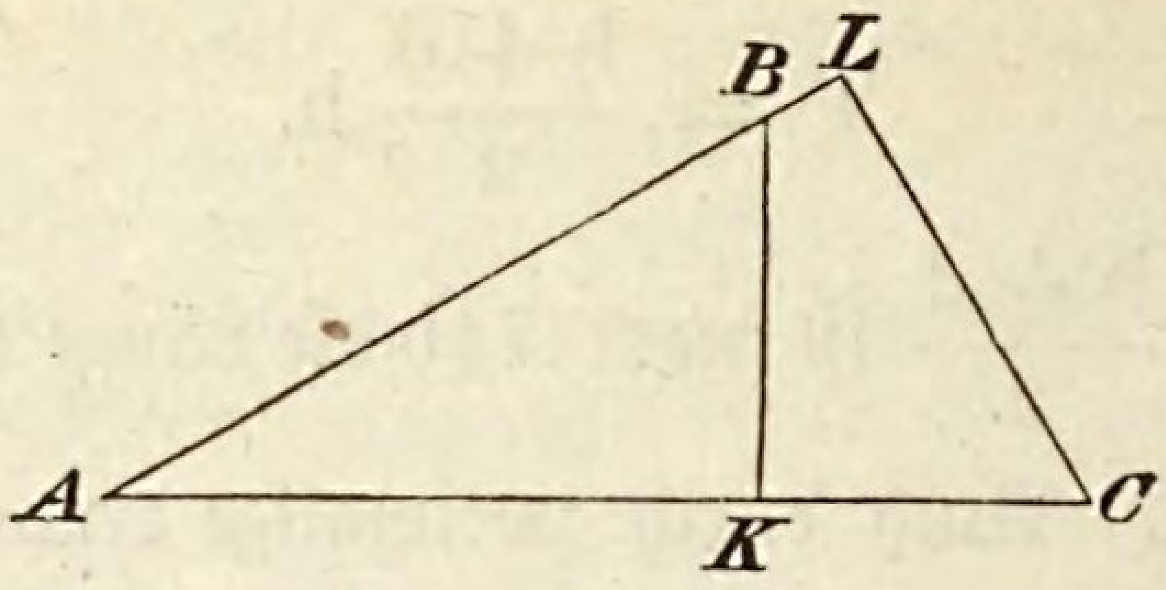
Die Bedeutung der folgenden Sätze ist wesentlich die, daß sie Gleichungen zwischen den Maßzahlen der Dimensionen ebener Figuren aufstellen, welche die Berechnung einer unbekannten Länge aus gegebenen Längen ermöglichen.

Aus diesem Grunde ist der arithmetischen Darstellung der Sätze und Beweise hier der Vorzug gegeben; der geometrische Sinn derselben erhellt aus 149 Zus. 2; sogenannte rein geometrische Beweise können als nützliche Uebungen betrachtet werden.

154. Lehrsatz.

Schneidet man auf den beiden Schenkeln eines Winkels beliebig lange Strecken (AB und AC) ab und projicirt jede derselben auf den anderen Schenkel, so sind die Produkte (Rechtecke) gleich, welche man erhält, wenn man je eine Strecke mit der Projection der anderen multiplicirt. Die auf der Hypotenuse senkrechte Transversale.

Behauptung. $AB . AL = AC . AK$.



Beweis. Da $\sphericalangle$ B = $\sphericalangle$ C, so gilt

$$\frac{\triangle ABK}{\triangle ACL} = \frac{AB.BK}{AC.CL} \quad (148\,b),$$

andererseits $$\frac{\triangle ABK}{\triangle ACL} = \frac{AK.BK}{AL.CL} \quad (146);$$

durch Anwendung von 5 und arithmetische Umformungen folgt die Behauptung.

Zusatz. Das Produkt der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist dem Produkte aus der Hypotenuse und der ihr zugehörigen Höhe gleich.

Beweis durch 151.

155. Lehrsätze.

Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels.

Fällt man im rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist

a) Das Quadrat dieser Senkrechten gleich dem Produkte aus den Abschnitten der Hypotenuse.

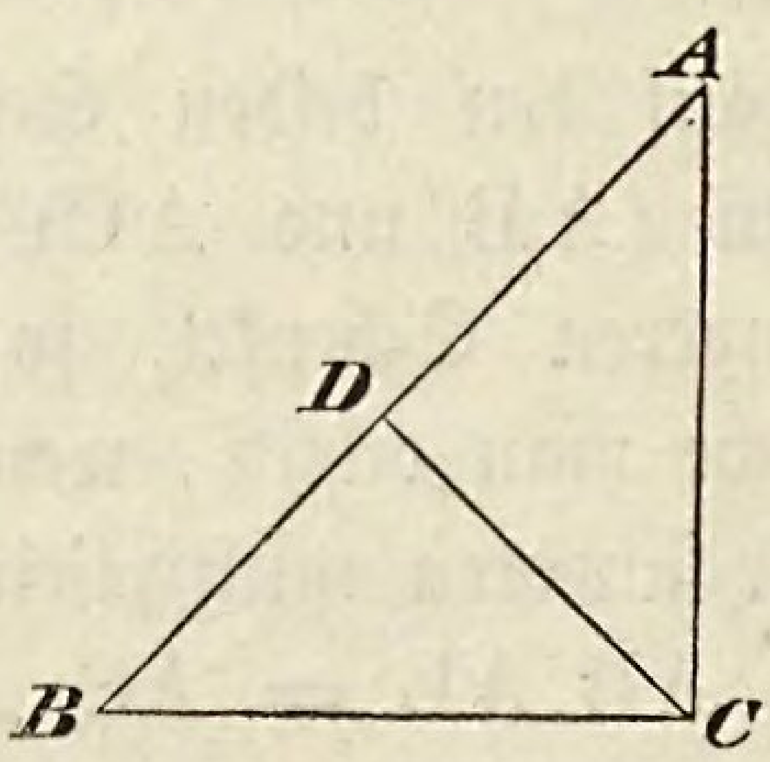
(Die Senkrechte ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Hypotenuse.)

b) Das Quadrat jeder Kathete ist gleich dem Produkte aus der Hypotenuse in ihre Projection auf die Hypotenuse.

(Die Kathete ist die mittlere Proportionale zur ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte derselben.)

Behauptungen. a) $CD^2 = BD.AD$.

b) $\begin{cases} AC^2 = AB.AD; \\ BC^2 = AB.BD. \end{cases}$



Beweise. Zu a). In den Dreiecken ACD und BCD ist

$$\sphericalangle A = \sphericalangle BCD$$

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$$

Wendet man nun auf diese beiden Dreiecke zweimal den Satz 148 b an, dann 5, so ist der Nachweis der ersten Behauptung nur noch von arithmetischen Umformungen abhängig.

Zu b). Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar durch Anwendung des Satzes 154.

156. Lehrsatz.

Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich. (Pythagoreischer Lehrsatz.) Beziehung zwischen den drei Seiten des rechtw. Dreiecks.

Beweis. Denkt man sich aus dem Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse gefällt, so gilt nach 155 b

$$AC^2 = AB.AD,$$

$$BC^2 = AB.BD;$$

$$\text{daher } AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Anmerkung. Ein rein geometrischer und von den hier zunächst vorausgehenden Sätzen unabhängiger Beweis läßt sich dadurch geben, daß man die erwähnten Quadrate wirklich construirt und CD so verlängert, daß das Quadrat über der Hypotenuse in zwei Rechtecke getheilt wird. Von diesen ist jedes dem Quadrate gleich, mit dem es ein Eck gemeinschaftlich hat. Um die Gleichheit zu beweisen, construirt man zwei (stumpfwinklige) Dreiecke, deren jedes nach 140 Zus. 2 die Hälfte von einer der als gleich zu erweisenden Figuren ist. Die Dreiecke selbst sind nach 48 (I) congruent.

Zusatz. Mit Hilfe des Lehrsatzes läßt sich die Länge einer Seite des rechtwinkligen Dreiecks berechnen, wenn die Länge der beiden anderen bekannt ist.

157. Lehrsatz.

Stehen die drei Seiten (a, b, c) eines Dreiecks in solcher Beziehung, daß Bedingung, welcher die Seiten genügen müssen.

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

so ist der Winkel (A), welcher der Seite a gegenüberliegt, ein rechter.

Beweis. Man denke sich ein rechtwinkliges Dreieck mit b und c als Katheten; ist die Hypotenuse desselben h, so ist $h^2 = b^2 + c^2$. Nach der Voraussetzung ist $a^2 = b^2 + c^2$, daher

$$a^2 = h^2$$

Gleichflächige Quadrate können aber nicht verschieden lange Seiten haben, daher

$$a = h.$$

Zusatz. Pythagoreische Dreiecke.

Aus dem Lehrsatze folgt: Stehen drei Zahlen in solcher Beziehung zu einander, daß das Quadrat der einen gleich der Summe der Quadrate der beiden andern ist, so wird ein Dreieck, welches man aus Strecken construirt, deren Maßzahlen jenen Zahlen gleich (oder proportional) sind, stets rechtwinklig. Da aber die Summe oder Differenz der Quadrate zweier Zahlen im Allgemeinen nicht wieder ein Quadrat ist, so ist das Verhältniß der Hypotenuse zu einer Kathete oder der Katheten zu einander im Allgemeinen irrational und die Strecken selbst incommensurabel.

Diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, in welchen die Verhältnisse aller drei Seiten zu einander rational sind, die drei Seiten demnach ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen pythagoreische Dreiecke.

Sollen h die Hypotenuse, b und c die Katheten eines pythagoreischen Dreiecks sein, so muß

$$b^2 = h^2 - c^2,$$

$$b = \sqrt{h^2 - c^2},$$

und b zugleich mit h und c rational sein.

Durch arithmetische Umformung ist

$$b = \sqrt{(h + c)(h - c)}$$

Setzt man $h + c = x$, $h - c = y$,

so wird $h = \frac{x + y}{2}$, $c = \frac{x - y}{2}$,

und $b = \sqrt{x\,y}$,

rational, wenn xy die zweite Potenz irgend einer endlichen Zahl ist.

Es ist also die Aufgabe, ein pythagoreisches Dreieck zu zu finden, darauf zurückgeführt, zwei Zahlen (x und y) zu

ermitteln, welche den Bedingungen genügen, daß $x > y$ und xy eine zweite Potenz ist. Ist dieses der Fall, so sind

$$\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2} \text{ und } \sqrt{xy}$$

die drei Seiten des verlangten Dreiecks.

Sollen dieselben überdies ganzzahlige Maße haben, so muß man x und y ganzzahlig und so wählen, daß beide gerade oder beide ungerade Zahlen sind.

Demnach werden alle möglichen pythagoreischen Dreiecke mit ganzen Maßzahlen der Seiten gefunden, wenn man in den durch Combination erhaltenen Produkten der auf einander folgenden Primzahlen

(1.2) 1.3, 1.5, 1.7 . . . .
2.3, 2.5, 2.7 . . . .
3.5, 3.7 . . . .
. . . .
1.2.3, 1.2.5, 1.2.7 . . . .
1.3.5, 1.3.7 . . . .
. . . .

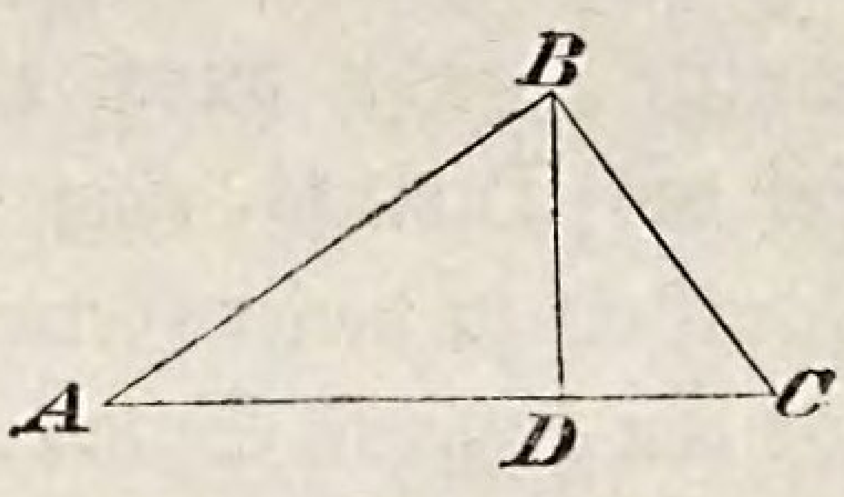
jeden Faktor mit einer (beliebigen) geraden Zahl potenzirt, das erhaltene Produkt (xy) beliebig in zwei ungleiche Faktoren zerlegt und dabei nur darauf Rücksicht nimmt, daß der Prim-Faktor 2 entweder in beiden oder in keinem der Faktoren vorkommt.

Diesen zwei Bedingungen läßt sich nur in dem besonderen Falle $1^2 . 2^2$ nicht genügen. Im übrigen liefern diejenigen Combinationen, in welchen man den Factor 2 nur mit 2 potenzirt hat, keine neuen Dreiecke, weil dann die Maßzahlen der 3 Seiten gerade Zahlen werden. . . .

158. Lehrsatz.

Gegenseite eines spitzen Winkels.

Liegt eine Dreiecksseite einem spitzen Winkel gegenüber, so ist das Quadrat dieser Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Produkte aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf dieselbe.



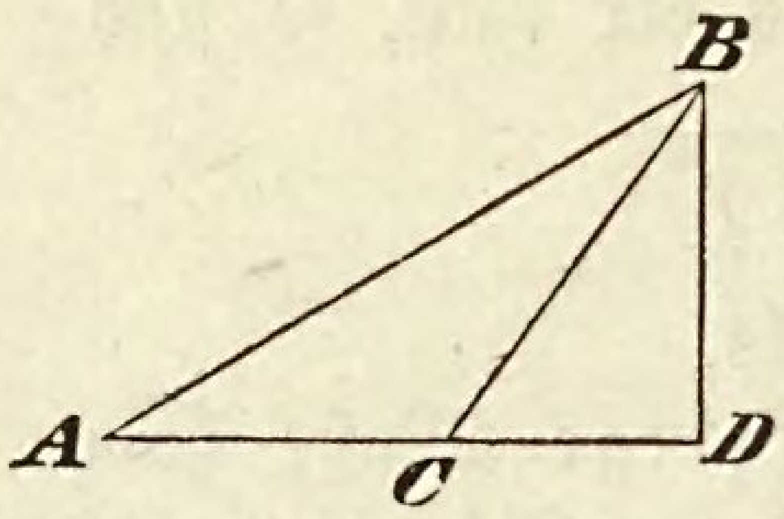
Voraussetzung. $\sphericalangle C < R$.

Behauptung. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC . CD$.

Zum Beweise setze man die beiden Werthe von BD^2, welche sich durch Anwendung von 156 auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ergeben, einander gleich und eliminire die Strecke AD.

159. Lehrsatz.

Gegenseite eines stumpfen Winkels.



Liegt eine Dreiecksseite einem stumpfen Winkel gegenüber, so ist das Quadrat dieser Seite gleich dem Quadrate der beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Produkt aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf dieselbe.

Voraussetzung. $\sphericalangle$ ACB > R.

Behauptung. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.CD$.

Beweis. Man setze die beiden Werthe von BD^2 einander gleich.

Anmerkung. Gibt man der Projection der Strecke BC, wenn sie sich vom Fußpunkte der Senkrechten aus nach entgegengesetzten Richtungen erstreckt, verschiedene Vorzeichen, wählt das negative Vorzeichen für den Fall, wo diese Projection außerhalb des Dreiecks liegt, und bemerkt, daß dieselbe Null ist, wenn BC einem rechten Winkel anliegt, so lassen sich die Sätze 156, 158, 159 in der Fassung des Lehrsatzes 158 vereinigen.

Zusatz. Einer Dreiecksseite liegt ein spitzer, (rechter) oder stumpfer Winkel gegenüber, je nachdem ihr Quadrat kleiner, (ebenso groß) oder größer ist, als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten.

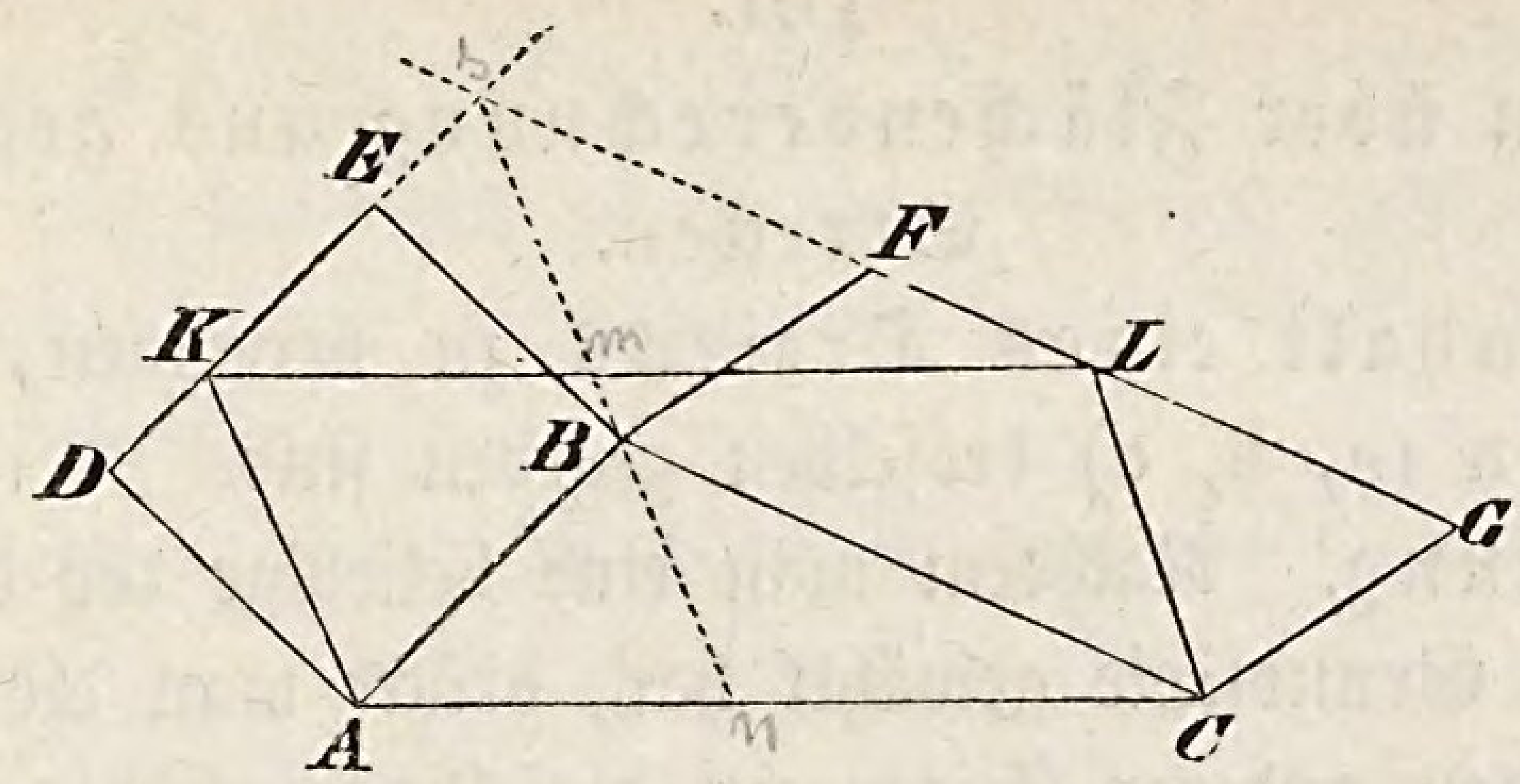
160. Lehrsätze zur Uebung.

Satz des Pappus.

1) Errichtet man über zwei Seiten eines Dreiecks beliebige Parallelogramme, verlängert die den Dreiecksseiten gegenüberliegenden Seiten dieser Parallelogramme bis zu ihrem Durchschnitte, zieht durch diesen Schnittpunkt und das nächstliegende Eck des Dreiecks eine Gerade, durch die beiden anderen Ecken Parallele zu dieser Geraden, so bilden diese (bis zum Durchschnitt mit den äußeren Seiten der Parallelogramme verlängert) die Seiten eines Parallelogramms, welches der Summe der beiden zuerst construirten Parallelogramme gleich ist.

Behauptung. AKLC = ADEB + BFGC.

Beweis. Durch zweimalige Anwendung von 139 läßt sich zeigen, daß das über einer Seite des Dreiecks construirte Parallelogramm demjenigen Theile des größeren Parallelogramms gleich ist, welcher mit ihm ein Eck gemeinschaftlich hat.



Anmerkung. Dieser Lehrsatz heißt der Satz des Pappus.*) Der pythagoreische Lehrsatz ist ein besonderer Fall desselben.

2) Im gleichschenkligen Dreiecke ist die zum Schenkel gehörige Höhe die mittlere Proportionale zum unteren Abschnitte und dem um den unteren Abschnitt verlängerten Schenkel. Uebungen.

3) Sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, m_c die Transversale, welche die Mitte der Seite c mit dem gegenüberliegenden Ecke verbindet, so ist

$$a^2 + b^2 = 2\, m_c^2 + \frac{1}{2} c^2.$$

Beweis durch 158 und 159.

4) In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. 158. 159.

5) In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der 4 Seiten, weniger dem Vierfachen des Quadrates der Strecke (v), welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

Beweis. Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen mit den gegenüberliegenden Ecken, so lassen sich die Quadrate dieser 4 Verbindungsstrecken zunächst durch die Seiten und Diagonalen ausdrücken. (160 Nr. 3.) Andererseits sind sie Seiten von Dreiecken, welche die Strecke v gemeinschaftlich haben, und deren andere Seiten die Hälften der Diagonalen sind. Wendet man auf diese Dreiecke 158 und 159 an, so erhält man neue Werthe der 4 Verbindungsstrecken, und durch Addition und 5 die Behauptung.

---

*) Pappus, ein Philosoph aus Alexandria, lebte um 380 n. Chr.

161.

Aufgaben über Flächenberechnung aus gegebenen Strecken.

Inhalt des Dreiecks durch die Seiten.

Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn die drei Seiten (a, b, c) desselben gegeben sind.

Anleitung. Nachdem man eine beliebige der drei Seiten, z. B. b zur Grundlinie gewählt hat, drückt man die Projection einer der beiden anderen Seiten auf dieselbe durch die drei Seiten aus (158), um dadurch das zur Berechnung der Höhe erforderliche Element zu erhalten.

Damit wird die Aufgabe gelöst in der Form

$$F = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2}.$$

Um die Lösung für numerische Rechnung bequem zu machen, formt man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen durch dreimalige Anwendung der Formel $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ so um, daß keine der Seiten mehr im Quadrate vorkommt, und erhält

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}.$$

Bezeichnet man mit s die halbe Summe der drei Seiten $\left(s = \frac{a + b + c}{2}\right)$, so erhält man die dem Gedächtniß bequeme Formel

$$F = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Zusatz 1. Mit der vorstehenden Aufgabe sind zugleich folgende gelöst:

1) Den Inhalt eines Parallelogramms aus zwei anstoßenden Seiten und einer Diagonale zu berechnen.

2) Den Inhalt eines Vierecks aus den vier Seiten und einer Diagonale zu finden.

3) Den Inhalt eines beliebigen Polygons aus den Seiten und den von einem Ecke aus laufenden Diagonalen zu berechnen.

Zusatz 2. Um den Inhalt (T) eines Trapezes aus den vier Seiten [$b >$ und $\parallel$ d, a, c] zu berechnen, bestimmt man die Höhe wie oben aus dem Dreiecke, dessen Seiten a, c, (b — d) sind, und erhält

$$T = \frac{b+d}{4(b-d)} \sqrt{[a+(b-d)+c]\,[a+(b-d)-c]\,[a+c-(b-d)]\,[(b-d)+c-a]}$$

wobei sich der Ausdruck unter der Wurzel von dem für das Dreieck abgeleiteteten nur dadurch unterscheidet, daß b durch (b — d) ersetzt ist. Inhalt des Trapezes durch die Seiten.

Führt man wieder die halbe Summe der Seiten ein

$$s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

so wird

$$T = \frac{b+d}{b-d} \sqrt{[s-b]\,[s-d]\,[s-(a+d)]\,[s-(c+d)]}.$$

Für d = o reducirt sich dieselbe auf die Formel für das Dreieck.

Zusatz 3. Für besondere Fälle tritt eine Vereinfachung des Ausdruckes der Fläche ein. Besondere Fälle.

1) Für das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse h, dessen eine Kathete a ist, wird die

$$\text{Fläche} = \frac{a}{2} \sqrt{(h+a)\,(h-a)}.$$

2) Für das gleichschenklige Dreieck, dessen Basis b und dessen Schenkel c ist, wird die

$$\text{Fläche} = \frac{b}{4} \sqrt{(2c+b)\,(2c-b)}.$$

3) Für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck, dessen Basis (Hypotenuse) b ist, wird die

$$\text{Fläche} = \frac{b^2}{4}.$$

4) Für das gleichseitige Dreieck mit der Seite b ist die

$$\text{Fläche} = \frac{b^2}{4} \sqrt{3}.$$

5) Für das Antiparallelogramm, dessen parallele Seiten b > d, und dessen gleiche Seiten a sind, ergibt sich, wenn $\frac{2a+b+d}{2} = s$ ist, die

$$\text{Fläche} = \frac{b+d}{2} \sqrt{(s-b)\,(s-d)}.$$

162. Uebungsaufgaben über Flächenberechnung.

1. Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Höhe zu berechnen.

Anmerkung. In dieser und den folgenden Aufgaben ist es für die Uebersicht förderlich, die unbekannten Strecken mit den letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen.

2. Den Inhalt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks aus der zur Hypotenuse gehörigen Höhe zu berechnen.

Den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, von welchem gegeben sind:

3. Eine Kathete (b) und die zur Hypotenuse gehörige Höhe (h).
4. Eine Kathete (b) und ihre Projection (p) auf die Hypotenuse.
5. Die Höhe (h) und die Projection (p) einer Kathete.
6. Die Hypotenuse (a) und die Summe (f) der beiden Katheten.
7. Eine Kathete (b) und die Summe (g) der Hypotenuse und anderen Kathete.
8. Die Höhe (h) und die Summe (f) der beiden Katheten. 156. 154 Z. Die Fläche wird aus einer quadrat. Gleichung gefunden.
9. Die Höhe (h) und der Umfang (l).
   Man bestimme die Hypotenuse aus drei Gleichungen. 156. 154 Z.
10. Die Summe (f) der beiden Katheten, und die Summe (g) einer Kathete und der Hypotenuse.

Den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn gegeben sind:

11. Die Projectionen (p) des einen Schenkels und (q) der Basis auf den andern Schenkel.
12. Die Projection (q) der Basis und die Projicirende (k).
13. Die beiden Höhen (h und k).

Den Inhalt eines ungleichseitigen Dreiecks zu berechnen, wenn gegeben sind:

14. Zwei Seiten ($b > c$) und die Differenz (d) ihrer Projectionen auf die Dritte.
15. Zwei Seiten (b, c) und die nach dem Mittelpunkte der einen vom gegenüberliegenden Ecke aus gezogene Transversale (m).
16. Eine Seite (c), die Summe (f) der beiden andern und die zu einer der letzteren Seiten gehörige Höhe (h).
17. Eine Seite (c), die Differenz (d) der beiden andern und die zur größeren von beiden gehörige Höhe (h).

Den Inhalt eines Parallelogramms zu bestimmen, wenn gegeben sind:

18. Eine Seite (a) und die beiden Diagonalen (e, f).
19. Eine Höhe (h) und die beiden Diagonalen (e, f)

Den Inhalt einer Raute zu berechnen, wenn gegeben sind:

20. Die Seite (a) und eine Diagonale (e).
21. Eine Höhe (h) und eine Diagonale (e).
22. Eine Diagonale (e) und die Summe (g) aus der Seite und der anderen Diagonale.

Den Inhalt eines Trapezes zu berechnen, wenn gegeben sind:

23. Die beiden Parallelen ($b > d$), eine Seite (a) und eine Diagonale (e).
24. Eine der Parallelen (b), die beiden andern Seiten (a, c) und eine Diagonale (e).
25. Die beiden Parallelen ($b > d$) und die beiden Diagonalen (e, f).
26. Eine der Parallelen (b), die beiden andern Seiten (a, c) und die Höhe (h).
27. Eine der nicht parallelen Seiten (a), die beiden Diagonalen (e, f) und die Höhe (h).
28. Eine der Parallelen (b), die beiden Diagonalen (e, f) und die Höhe (h).

Anmerkung. Sind von den n Bestimmungsstücken des Inhalts ($n-1$) Stücke und die Größe des Inhalts gegeben, so läßt sich das n^{te} Bestimmungsstück berechnen. In diesem Sinne kann man jede der vorstehenden Aufgaben n mal umkehren.

Dritter Theil.

Die Form der Figuren.

I. Abschnitt.

Proportionen zwischen Dimensionen der Figuren.

163.

Allgemeines über geometrische Proportionen.

Erklärung.

Unter einer geometrischen Proportion versteht man eine Gleichung zwischen zwei Quotienten (Brüchen, Verhältnissen). Man schreibt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

oder $a:b = c:d$,

und liest: a verhält sich zu b wie c zu d.

Man will damit entweder sagen: b ist so oft in a enthalten als d in c (wenn a mit b, c mit d gleichartig sind), oder: der b^{te} Theil von a ist dem d^{ten} Theile von c gleich, wenn a mit c gleichartig, b und d aber Zahlen sind.

Die vier Größen a, b, c, d heißen Glieder der Proportion, die Zähler (a und c) Vorderglieder, die Nenner (b und d) Hinterglieder. Jedes Glied heißt zu seinem gleichnamigen, das Vorderglied zum Vordergliede, das Hinterglied zum Hintergliede, homolog.

Außerdem heißen a und d äußere, b und d mittlere Glieder.

Anmerkung. Wenn im Folgenden der Ausdruck gebraucht ist: Es verhalten sich zwei Strecken . . wie zwei andere, oder: die zwei Strecken . . stehen mit zwei anderen in Proportion; so ist damit gemeint, daß die ersten beiden Strecken in der angeführten Ordnung das eine Verhältniß (die eine Seite), die anderen beiden das zweite Verhältniß (die andere Seite) der Proportion bilden.

Lehrsätze.

Das Produkt der mittleren und der äußeren Glieder.

a) In jeder (geometrischen) Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren Glieder gleich.

Voraussetzung. $a:b = c:d$.

Behauptung. $ad = bc$.

Beweis durch Multiplikation der Voraussetzung mit bd.

Zusatz. Ist ein äußeres Glied einer Proportion einem mittleren gleich, so ist auch das zweite äußere Glied dem zweiten mittleren gleich.

Umformungen.

b) Da aus der Gleichung zweier Produkte stets (hier durch Division mit bd) eine richtige Proportion abgeleitet werden kann, so erhält man richtige Proportionen, wenn man nur solche Veränderungen an einer gegebenen Proportion vornimmt, daß das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren gleich bleibt.

Es ist deßhalb erlaubt:

1) die mittleren Glieder mit einander zu vertauschen,

2) die äußeren Glieder mit einander zu vertauschen,
3) die äußeren Glieder zu mittleren und dafür die mittleren zu äußeren zu machen.

Hingegen kann man nicht ein einzelnes äußeres Glied mit einem einzelnen mittleren vertauschen.

Ferner erhält man richtige Proportionen, wenn man

4) in einer solchen ein äußeres und mittleres Glied zugleich mit gleichen Zahlen multiplicirt oder dividirt, und wenn man
5) zwei richtige Proportionen Glied für Glied mit einander multiplicirt oder dividirt, jedes Glied mit der nämlichen Zahl potenzirt oder radicirt.

c) Ist $a:b = c:d$ richtig, so gilt auch: Ableitungen.

1) $(a+b) : b = (c+d):d$,
2) $(a+b) : a = (c+d):c$,
3) $(a-b) : b = (c-d):d$,
4) $(a-b) : a = (c-d):c$,
5) $(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d)$.

Beweis. Um 1) bis 4) abzuleiten, addirt oder subtrahirt man 1 auf beiden Seiten der Voraussetzung und wendet b 1 und Substitution gleicher Verhältnisse wiederholt an; 5) erhält man aus 1) und 3) durch b 5.

d) Erklärung. Um auszudrücken, daß Zusammensetzung.

$$\begin{array}{ccccccc} a & : & b & = & a_1 & : & b_1 \\ b & : & c & = & b_1 & : & c_1 \\ c & : & . & = & c_1 & : & . \\ . & & . & . & . & & . \\ . & & m & . & . & & m_1 \\ m & : & n & = & m_1 & : & n_1 \end{array}$$

schreibt man kurz:

$$a:b:c:\ldots\ldots m:n = a_1:b_1:c_1:\ldots\ldots m_1:n_1.$$

Es folgt daraus

$$(a+b+c+\ldots\ldots m+n):a = (a_1+b_1+c_1+\ldots\ldots m_1+n_1):a_1$$

Beweis. Durch successive Multiplikation der aufgelösten Gleichungen überzeugt man sich, daß

$$\left[\frac{a}{a} = \frac{a_1}{a_1}\right]$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{c_1}{a_1}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{m}{a} = \frac{m_1}{a_1}$$
$$\frac{n}{a} = \frac{n_1}{a_1}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt die Behauptung.

Stetige Proportion.

e) Erklärung. Eine Proportion heißt stetig, wenn die mittleren Glieder einander gleich sind.

Statt

$$a : b = b : c$$

schreibt man auch

$$a : b : c.$$

Das mittlere Glied der stetigen (geometrischen) Proportion heißt die mittlere (geometrische) Proportionale zu den beiden äußeren Gliedern.

Aus $a : b : c$ folgt $b^2 = ac$, und umgekehrt kann aus der Gleichung

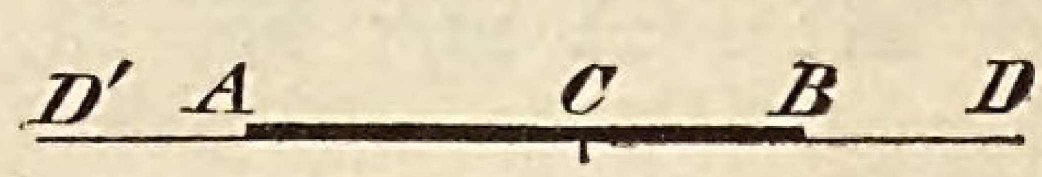
$$b^2 = ac$$

immer eine stetige Proportion mit b als mittlerem Gliede abgeleitet werden.

164. Erklärung.

Erweiterung des Begriffs der Theilung einer Strecke.

Faßt man die Strecke AB als die Entfernung des Punktes B von A auf, dadurch entstanden, daß der Punkt B sich von A aus auf der durch AB bestimmten Geraden bewegt hat und schließlich



in B zur Ruhe gekommen ist, so kann diese schließliche Entfernung AB von A erstens dadurch entstehen, daß der Punkt B nach Zurücklegung der Strecke AC < AB noch den übrigen Weg CB macht. Dann ist C ein Theilpunkt der Strecke AB im gewöhnlichen Sinne und diese Strecke durch Addition der beiden positiven Summanden AC und BC entstanden. Ein solcher Theilpunkt soll im Folgenden ein innerer Theilpunkt und die

Abschnitte AC und CB innere (additive) Abschnitte der Strecke AB genannt werden. Zweitens kann AB als schließliche Entfernung dadurch entstanden sein, daß der Punkt zunächst über die Stelle B hinaus etwa bis D ging, dann von D nach B zurückkehrte, so daß AB die Summe aus dem positiven Summanden AD und dem negativen DB ist [AB = AD + (— BD)]. Endlich hätte der Punkt zunächst von A aus in negativer Richtung, etwa nach D', und dann von D' nach B gehen können, wodurch sich die Entfernung AB aus dem negativen Summanden AD' und dem positiven D'B gebildet hätte [AB = (— D'A) + D'B].

Man ist übereingekommen, auch die Summanden AD, DB, AD' D'B als Abschnitte der Strecke AB anzusehen und nennt sie äußere (subtractive) Abschnitte, die Punkte D und D' äußere Theilpunkte der Strecke.

165.

Lage einer Geraden gegen ein Dreieck.

a) Die Gerade ist einer Seite des Dreiecks parallel.

Dann macht sie im Allgemeinen auf den beiden andern Seiten innere oder äußere Abschnitte.

Besondere Fälle sind, daß die Gerade durch das der parallelen Seite gegenüberliegende Eck des Dreiecks geht, oder daß sie die ihr parallele Seite selbst enthält.

Für den letzteren Fall ist zu bemerken, daß das Dreieck ganz auf einer Seite der Geraden liegt.

b) Die Gerade ist keiner Seite des Dreiecks parallel.

Wir unterscheiden dann, ob die Gerade durch ein Eck des Dreiecks geht oder nicht.

1) Geht die Gerade durch ein Eck, so macht sie auf der gegenüberliegenden Seite entweder innere oder äußere Abschnitte.

Es ist leicht ersichtlich, daß dabei mehrere ausgezeichnete Lagen möglich sind, von denen zum Theil schon früher die Rede war.

2) Geht die Gerade nicht durch ein Eck, so macht sie ent-

weder auf zwei Seiten innere und auf der dritten Seite äußere Abschnitte; oder sie macht auf allen drei Seiten äußere Abschnitte.

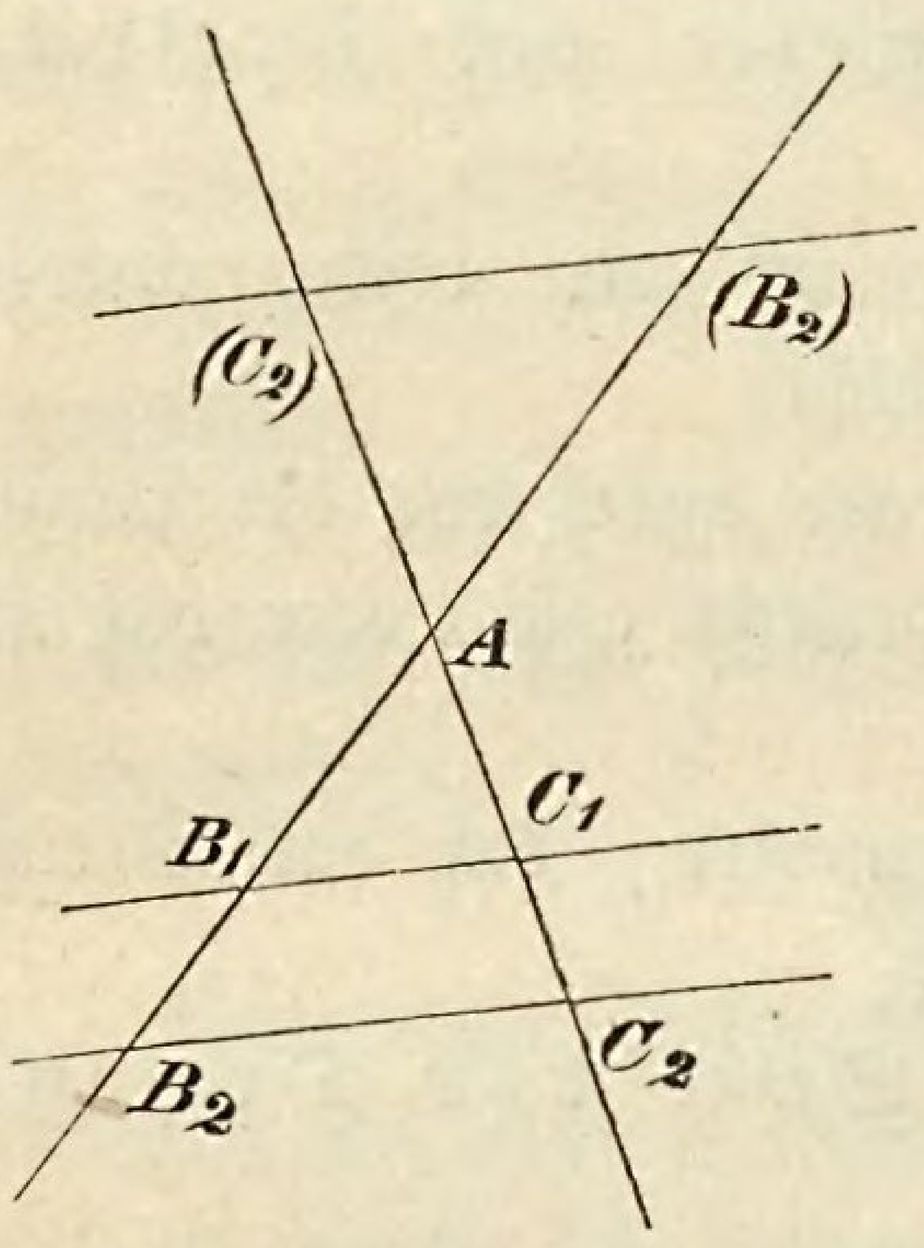
Beweis: Da die Gerade die Richtungen der drei Seiten schneiden muß, so sind die beiden übrigen denkbaren Fälle: innere Abschnitte auf einer, äußere auf den beiden andern Seiten — und innere Abschnitte auf den drei Seiten auszuschließen. Der erstere erledigt sich durch 88 a, der letztere durch die Bemerkung, daß ein dritter innerer Theilpunkt zwischen den beiden schon geschnittenen Seiten liegen müßte, die schneidende Gerade aber wegen 59 gegen die dritte Seite nicht von beiden Seiten her convergiren kann.

Folgerungen aus den einzelnen als möglich erkannten Lagen, und Bedingungen für das Stattfinden derselben bilden den Inhalt der folgenden Sätze.

166. Lehrsätze.

Die parallelen Transversalen.

Werden zwei Gerade, die sich selbst (im Punkte A) schneiden, von zwei beliebigen Parallelen B_1C_1 und B_2C_2 geschnitten, so stehen



a) die vom Scheitel A aus gezählten durch die eine Parallele gemachten Abschnitte mit den durch die andere Parallele gemachten so in Proportion, daß die auf derselben Geraden gemachten Abschnitte die homologen Glieder bilden.

Behauptung: $AB_1 : AC_1 = AB_2 : AC_2$.

Beweis. Da die Dreiecke AB_1C_1 und AB_2C_2 die Winkel beziehungsweise gleich haben, so ist 148 b anwendbar. (Zweimal.)

b) Es stehen zwei von A aus gezählte, durch eine der Parallelen gemachte Abschnitte mit den zwischen den beiden Parallelen liegenden Abschnitten so in Proportion, daß die auf derselben Geraden liegenden Abschnitte die homologen Glieder bilden.

Behauptung: $AB_1 : AC_1 = B_1B_2 : C_1C_2$

$AB_2 : AC_2 = B_1B_2 : C_1C_2$

Beweis. Der Satz kann durch 163 c aus dem unter a vorgetragenen abgeleitet werden.

c) Die zwischen den Schenkeln liegenden beiden Stücke der Parallelen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Anfangspunkte vom Scheitel (A).

Behauptung. $B_1C_1 : B_2C_2 = AB_1 : AB_2$
$B_1C_1 : B_2C_2 = AC_1 : AC_2$

Beweis. Man wendet entweder 148 b zweimal an, oder zieht durch B_1 (C_1) eine Parallele zu AC_2 (AB_2) und benützt 166 b u. 61 c.

Anmerkung. In den Proportionen a und b kann man auch aus arithmetischen Gründen (163 b) die auf derselben Geraden liegenden Abschnitte in ein Verhältniß zusammensetzen, dann treten in den homologen Gliedern die von derselben Parallelen gemachten Abschnitte auf.

167. Lehrsatz.

Verallgemeinerung. Durchschneidet man eine beliebige Anzahl von Geraden, die alle durch einen Punkt (A) gezogen sind (oder nach demselben convergiren), mittelst beliebiger Parallelen, so gilt:

a) Zwei Abschnitte (der Geraden, nach) welche zwischen zwei Parallelen liegen, stehen mit zwei anderen Abschnitten derselben beiden Geraden, die zwischen zwei anderen Parallelen oder zwischen einer Parallelen und A liegen, in Proportion, so daß die auf derselben Geraden liegenden Abschnitte die homologen Glieder bilden.

b) Zwei parallele Strecken, welche zwischen zwei der von A aus divergirenden Geraden liegen, verhalten sich

α) wie zwei von diesen Parallelen auf einer beliebigen Geraden gemachten (von A aus gezählten) Abschnitte, also auch wie ihre (senkrechten) Abstände von A,

β) wie zwei andere Strecken derselben beiden Parallelen, die zwischen zwei anderen dieser Geraden liegen.

168. Lehrsatz.

Anwendung auf das Dreieck. Die inneren oder äußeren Abschnitte, welche eine zu einer Dreiecksseite parallele Gerade auf den beiden anderen Dreiecksseiten macht, stehen unter sich und mit den geschnittenen Dreiecksseiten so in Proportion, daß die homologen Glieder von den auf derselben Dreiecksseite gemachten Abschnitten gebildet werden.

Ferner verhalten sich die parallelen Strecken selbst, wie die

Entfernungen ihrer Anfangspunkte von der Spitze des Dreiecks und wie ihre (senkrechten) Abstände von der Spitze.

169. Lehrsätze.

Der Parallelismus der Transversalen von Proportionen abhängig.

a) Machen zwei Gerade B_1C_1 und B_2C_2 auf zwei sich in A schneidenden Geraden solche (von A aus gemessene) Abschnitte, daß zwischen den von der einen gemachten Abschnitten einerseits und den von der andern gemachten andererseits eine Proportion besteht, in der die auf derselben Geraden gemachten Abschnitte die homologen Glieder bilden, so sind die Geraden B_1C_1 und B_2C_2 parallel.

Voraussetzung. $AB_1 : AC_1 = AB_2 : AC_2$.

Behauptung. $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

Beweis. Eine durch B_1 zu B_2C_2 gezogene Parallele schneidet die Gerade AC_2 in C_1, da sich die Entfernung (x) ihres Durchschnittspunktes von A_1 aus der vermöge 166 a geltenden Proportion gleich AC_1 berechnet.

b) Die Geraden (B_1C_1 und B_2C_2) sind auch parallel, wenn sich die durch eine derselben gemachten Abschnitte wie die zwischen den Geraden liegenden Abschnitte (B_1B_2 und C_1C_2) verhalten, weil sich daraus durch 163c die Voraussetzung des Lehrsatzes a ergibt.

Die Geraden sind aber nicht nothwendig parallel, wenn sich ihre eigenen zwischen den Schenkeln liegenden Stücke wie die Abstände zweier Anfangspunkte von A verhalten. Vgl. 74 Anmerkung.

c) Zieht man durch verschiedene Punkte eines Strahles nach einer Seite hin parallele Strecken, welche sich verhalten wie die Entfernungen ihrer Anfangspunkte vom Anfangspunkte des Strahles, so liegen die Endpunkte dieser Strecken in einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt des Strahles geht.

Beweis. Man zeige, daß die durch den Anfangspunkt des Strahles und den Endpunkt einer Strecke gezogene Gerade durch den Endpunkt einer beliebigen andern der parallelen Strecken geht, indem man die Voraussetzung mit 166 c verbindet.

Zusatz. Der Satz gilt auch dann noch, wenn man die Anfangspunkte der parallelen Strecken auf zwei Strahlen annimmt, welche von einem Punkte nach entgegengesetzter Richtung gehen. Nur müssen dann diejenigen Strecken, welche auf entgegengesetzten Strahlen anfangen, auch nach entgegengesetzter Richtung gezogen werden.

170. Lehrsätze.

a) Die Gerade, welche einen Winkel des Dreiecks halbirt, theilt die gegenüberliegende Seite in innere Abschnitte, welche sich wie die ihnen anliegenden Dreiecksseiten verhalten. Transversalen durch die Ecken.

Beweis. Die beiden Dreiecke, welche entstehen, verhalten sich einerseits wie die Abschnitte, andererseits wie die anliegenden Seiten (148 b). Winkelhalbirungstransversale.

b) Die Gerade, welche einen Außenwinkel des Dreiecks halbirt, macht auf der gegenüberliegenden Seite äußere Abschnitte, welche sich wie die ihnen anliegenden Dreiecksseiten verhalten.

Beweis. Die Halbirungslinie des Außenwinkels bildet der Voraussetzung zufolge mit der einen Dreiecksseite das Supplement des Winkels, den sie mit der anderen Seite bildet, folglich ist auf die Dreiecke, deren gemeinschaftliche Seite die Halbirungslinie ist, 148 c anwendbar. Determination!

171. Lehrsatz.

Theilt eine durch ein Eck des Dreiecks gezogene Gerade die Gegenseite in zwei innere oder in zwei äußere Abschnitte, welche sich wie die anliegenden Dreiecksseiten verhalten, so halbirt die Gerade den inneren, beziehungsweise den Außenwinkel des Dreiecks.

Beweis. Man zieht die Halbirungslinie des Winkels und zeigt durch Anwendung von 170 und 163c, daß die in der Behauptung genannte Gerade zwei Punkte mit ihr gemeinschaftlich hat.

172. Lehrsatz.

Halbirt man zugleich einen inneren Winkel des Dreiecks und seinen Außenwinkel, so stehen die zwei inneren auf der Gegenseite gemachten Abschnitte mit den zwei äußeren so in Proportion, daß Abschnitte, welche einen Theilpunkt gemeinschaftlich haben, die homologen Glieder bilden.

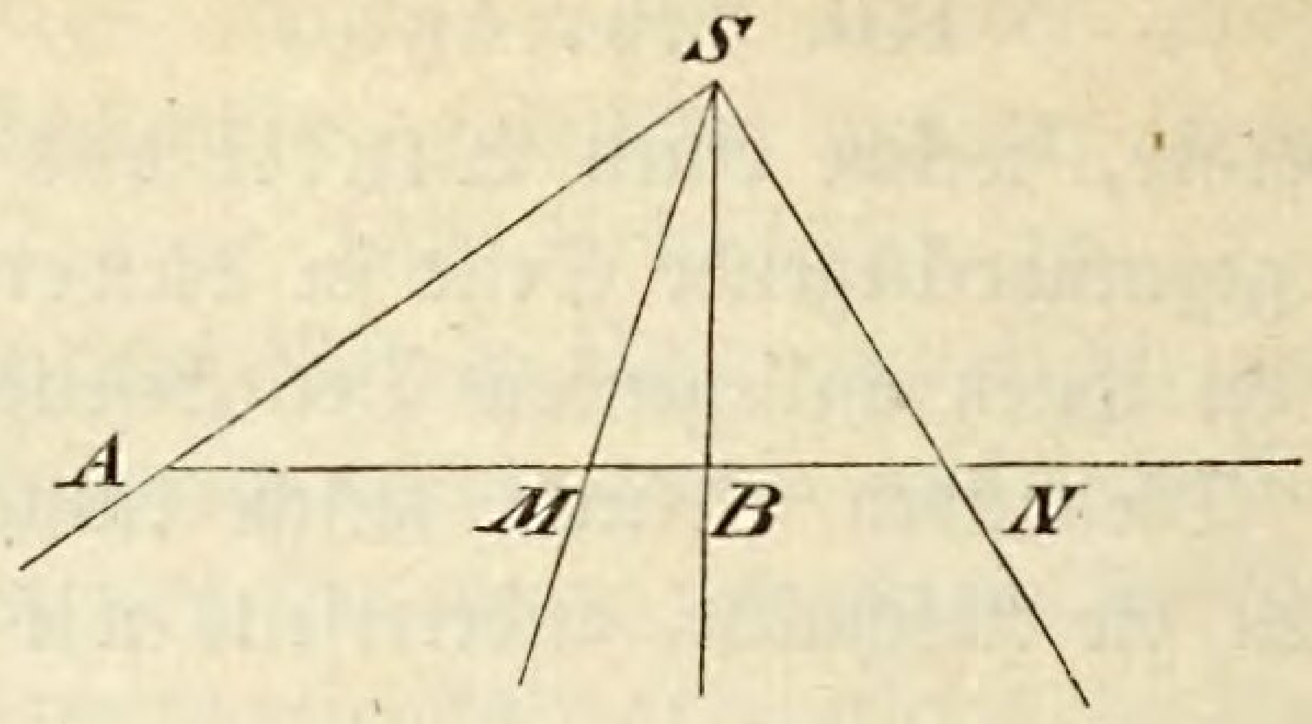
Beweis folgt unmittelbar aus 170.

173. Erklärungen.

a) Ist eine Strecke AB durch zwei Punkte M und N so in innere und äußere Abschnitte getheilt, daß die inneren Abschnitte sich wie die äußeren verhalten: Harmonische Theilung.

$$AM : MB = AN : NB,$$

so heißt die Strecke AB in M und N harmonisch getheilt,



und die Punkte A, B, M, N heißen vier harmonische Punkte. Die beiden Endpunkte A und B der Strecke und ebenso die beiden Theilpunkte M und N heißen conjugirte oder zugeordnete harmonische Punkte.

Zusatz 1. Ist die Strecke AB in M und N harmonisch getheilt, so ist auch die Strecke MN in B und A harmonisch getheilt, d. h. die von conjugirten harmonischen Punkten begrenzten Strecken sind zugleich harmonisch getheilt.

Zusatz 2. Man sagt auch von einer Geraden, sie ist harmonisch getheilt, wenn auf ihr vier harmonische Punkte liegen.

b) Nimmt man außerhalb einer Geraden einen beliebigen Punkt an und zieht von demselben Strahlen durch vier harmonische Punkte, so heißen diese Strahlen harmonische Strahlen und diejenigen derselben, welche durch conjugirte Punkte gehen, conjugirte (harmonische) Strahlen.

Beispiel. Die Schenkel eines beliebigen Winkels, die Halbirungslinie desselben und die Halbirungslinie seines Nebenwinkels sind vier harmonische Strahlen. (172.)

Anmerkung. Der Begriff der harmonischen Strahlen erstreckt sich auch auf den Fall, in welchem die durch vier harmonische Punkte gezogenen Geraden parallel sind (der Ausgangspunkt unendlich entfernt liegt).

174. Lehrsätze.

Die Mittelpunktstransversale ist conjugirt zu dem der Grundlinie parallelen Strahle.

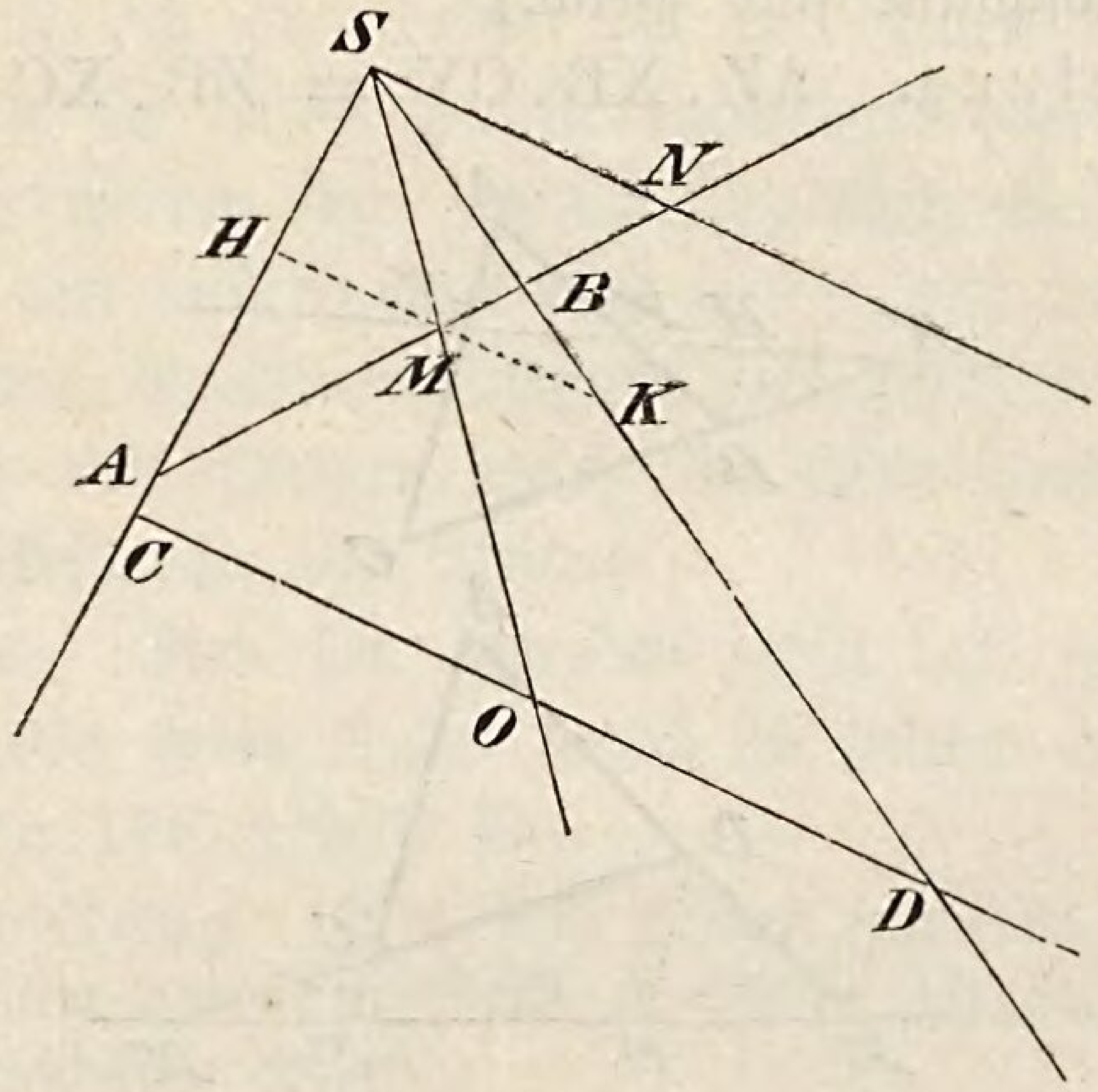
a) Jede durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite (Grundlinie) gezogene Gerade wird durch diesen Punkt, die Richtungen der beiden andern Seiten und die durch die Spitze zur Grundlinie gezogene Parallele harmonisch getheilt.
Beweis durch zweimalige Anwendung von 166 c.

b) Ist irgend eine Gerade durch vier von einem Punkte ausgehende Strahlen harmonisch getheilt, und man zieht zu einem äußeren Strahle eine Parallele, so schneiden die drei übrigen Strahlen auf der Parallelen zwei gleich große Strecken ab.
Sei AB die von S aus in M und N harmonisch getheilte

Strecke, so ist

Voraussetzung: AM : MB = AN : NB
CD || SN

Behauptung. CO = OD.



Beweis. Man ziehe durch den (dem parallelen conjugirten) Strahl (SM) in M eine Parallele (HK) zu CD, so ist CO = OD, wenn HM = MK (167 b β). Dieses folgt aber, wenn man HM || SN, MK || SN beachtet und 166 c anwendet.

c) Stehen von vier harmonischen Strahlen zwei conjugirte auf einander senkrecht, so halbirt der mittlere derselben den Winkel der beiden andern (conjugirten) Strahlen, der äußere der Nebenwinkel desselben. (Umkehrung von 172.)

Beweis. Man ziehe durch irgend einen Punkt (M) des mittleren Strahles der Voraussetzung eine Parallele zum conjugirten, so ist diese nach 174 b in M halbirt. 37 β. 53 b_2. 26 α.

175. Lehrsatz.

Wird durch vier von einem Punkte ausgehende Strahlen eine Gerade harmonisch getheilt, so wird jede Gerade (g) harmonisch getheilt, welche die vier Strahlen schneidet. *Vier harmonische Strahlen theilen jede Gerade harmonisch.*

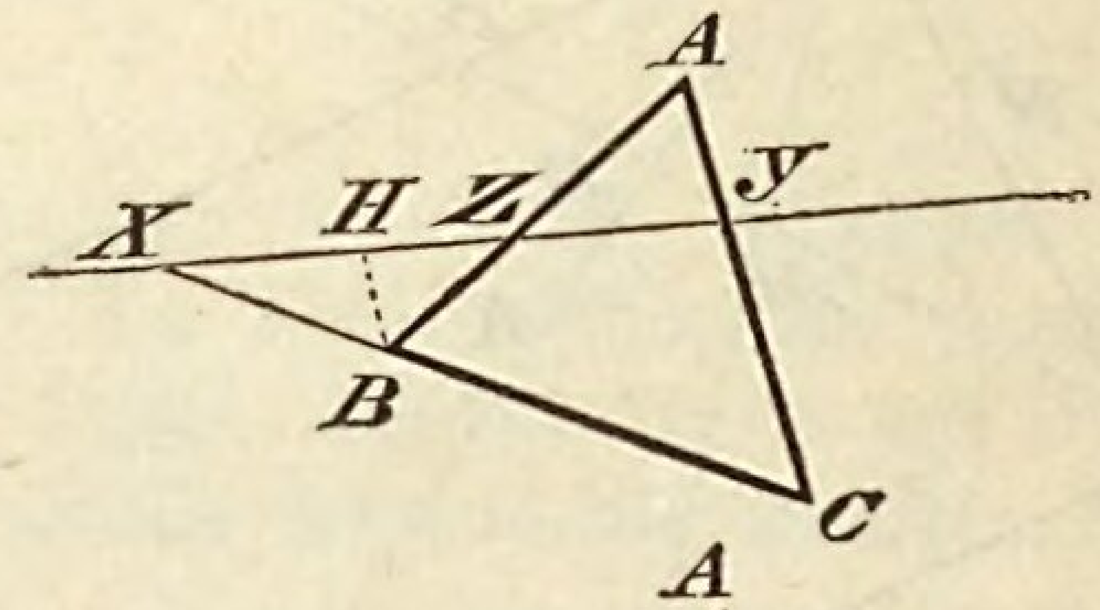
Beweis. Man denke sich durch einen inneren Theilpunkt (M), der in der Behauptung genannten Geraden (g) eine Parallele zum conjugirten harmonischen Strahle gezogen, so wird diese nach 174 b im Punkte M halbirt. Somit wird 174 a anwendbar, wornach g durch die gegebenen vier Strahlen harmonisch getheilt ist.

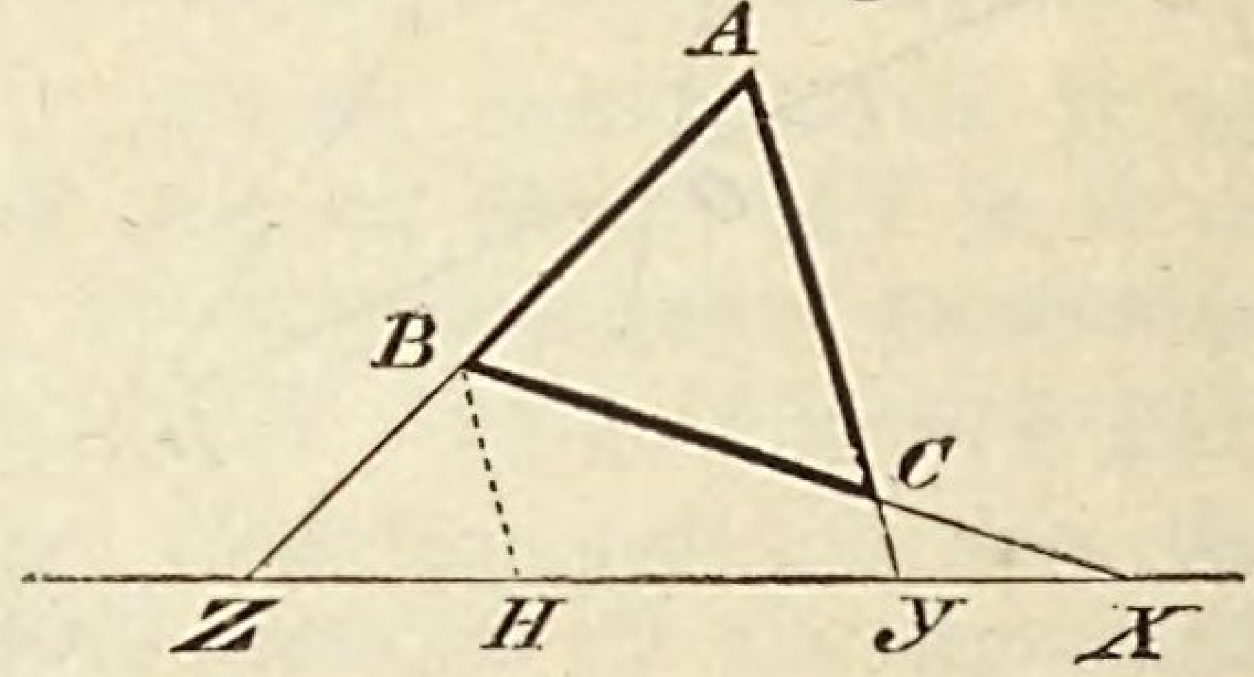
176. Lehrsatz.

Macht eine Gerade auf zwei Seiten eines Dreiecks innere, auf der dritten äußere Abschnitte, oder macht die Gerade auf den *Transversalen durch die Seiten.*

drei Seiten äußere Abschnitte; so ist das Produkt der drei Abschnitte, welche keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben, dem Produkte der drei übrigen Abschnitte gleich. (Die Produkte der überspringenden Abschnitte sind gleich.)

Behauptung. AZ . XB . CY = ZB . XC . YA.





Beweis. Man ziehe durch (den einen Endpunkt der subtraktiv getheilten Strecke) B die zu CA parallele Hilfslinie BH, und wende auf BH || YA, BH || CY 166c an.

177. Lehrsatz.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks so getheilt, daß die Produkte der überspringenden Abschnitte gleich sind, und sind

a) zwei Theilpunkte innere, der dritte ein äußerer, oder

b) alle drei Theilpunkte äußere,

so liegen die drei Theilpunkte in gerader Linie.

Beweis. Man zeigt, daß die Verbindungsstrecke zweier Theilpunkte (Y, Z), verlängert, durch den dritten (X) geht. Bezeichnet man zu diesem Zwecke vorläufig mit X′ den unbekannten Schnittpunkt der Geraden YZ und CB, also mit X′B den unbekannten äußeren Abschnitt der CB, so folgt durch Verbindung der Voraussetzung mit 176:

$$\frac{X'B}{XB} = \frac{X'C}{XC}$$

oder nach 163b $X'C : X'B = XC : XB$,

woraus $(X'C - X'B) : X'B = (XC - XB) : XB$

da nun $X'C - X'B = BC = XC - XB$,

folgt $X'B = XB$.

Somit ist die unbekannte Länge X'B bestimmt und erwiesen, daß X in der Geraden BC liegt.

178. Lehrsatz.

Schneiden sich drei durch die drei Ecken eines Dreiecks gehende Gerade in einem Punkte (innerhalb oder außerhalb des Dreiecks), so werden die gegenüberliegenden Seiten jede so in zwei (innere oder äußere) Abschnitte zerlegt, daß das Produkt aus drei Abschnitten, die keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben, dem Produkte der drei übrigen gleich ist. (Die Produkte der überspringenden Abschnitte sind gleich.) Drei Ecken-Transversalen durch einen Punkt.

Beweis. Eine der Geraden theilt das gegebene Dreieck in zwei Dreiecke, deren Seiten durch die beiden anderen Geraden im Sinne von 176 getheilt sind.

Anmerkung. Hier sind immer entweder alle drei Seiten in innere oder eine Seite in innere, die beiden andern in äußere Abschnitte getheilt.

179. Lehrsatz.

Ist jede Seite eines Dreiecks in zwei Abschnitte so getheilt, daß das Produkt aus drei Abschnitten, die keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben, dem Produkte der drei übrigen gleich ist, und sind

a) die drei Theilpunkte innere, oder

b) ein Theilpunkt ein innerer, die beiden anderen äußere;

so schneiden sich die Geraden, welche die Theilpunkte der Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Punkte.

Beweis. Man zeigt durch Verbindung der Voraussetzung mit 178, daß die durch den Schnittpunkt zweier Transversalen und das dritte Eck gezogene Gerade in den dritten Theilpunkt treffen muß. Die Entfernung ihres Schnittpunktes von einem Endpunkte der geschnittenen Seite ist der Entfernung des dritten Theilpunktes von demselben Endpunkte gleich.

Anmerkung. Die Sätze in 56 und 77 sind besondere Fälle dieses allgemeinen Lehrsatzes und lassen sich auf denselben zurückführen.

180.

Erklärung: Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines Trapezoides bis zu ihren Durchschnittspunkten, so ent-

Das vollständige Vierseit.

steht eine Figur, welche aus dem Trapezoide und zwei Dreiecken zusammengesetzt ist und ein vollständiges Vierseit heißt. Das vollständige Vierseit hat 6 Ecken, (die vier Ecken des Trapezoides und die beiden Schnittpunkte) und drei Diagonalen (die beiden des Trapezoides und die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte).

Lehrsatz. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die (Richtungen der) beiden andern harmonisch getheilt.

Beweis. Man zeige zunächst, daß die dritte (äußere) Diagonale harmonisch getheilt ist (178 und 176) und wende dann zweimal 175 an.

II. Abschnitt.

Die Form der Figuren.

181. Erklärung.

Um auszudrücken, daß Figuren gleiche Form haben, sagt man von ihnen, sie sind einander ähnlich, und setzt zwischen ihre Bezeichnungen das Zeichen $\backsim$ (similis).

Congruente Figuren haben gleiche Form; es können aber Figuren ähnlich sein, ohne congruent zu sein. Dieser Begriff der Aehnlichkeit bedarf der Entwicklung.

Entwickelung des Begriffes der Aehnlichkeit.

a) Derselbe wird erstens so gefaßt, daß er auf zwei Polygone von verschiedener Seitenzahl überhaupt keine Anwendung findet.

Daraus folgt, daß die Seitenzahl eines Polygons ein Bestimmungsstück seiner Form ist.

b) Ferner ist die Form einer Figur von ihrer Größe ganz unabhängig zu denken, so also, daß zwei Figuren bei jedem beliebigen Größenverhältnisse ähnlich sein können, und daß zwei ähnliche Figuren, ohne daß sie aufhören, ähnlich zu sein, in jedes beliebige Größenverhältniß gebracht werden können.

α) Daraus folgt zunächst, daß zwei Figuren f und F einander ähnlich sind, wenn man die eine (durch Aenderung von Bestimmungsstücken der Größe) der anderen nicht gleich machen kann, ohne daß sie ihr zugleich congruent wird.

Beweis. Hätten die Figuren f und F verschiedene Form, so müßte man f mit Beibehaltung seiner Form in der Größe beliebig ändern, also auch dem F an Größe gleich machen können; es wäre dann f gleich F, in der Form aber von F verschieden gegen die Voraussetzung.

Es ist somit eine Figur, welche durch eine Dimension vollkommen bestimmt ist, jeder anderen mit ihr in derselben Weise bestimmten Figur ähnlich. Somit sind reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl einander ähnlich, und alle Kreise einander ähnlich.

β) Im Allgemeinen folgt, daß Bestimmungsstücke der Form solche sind, welche bei beliebiger Aenderung der Größe beibehalten werden können, und daß die Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Polygone so festzustellen sind, daß sie bei jedem Größenverhältnisse der Polygone erfüllt sein können.

c) Diesen Forderungen wird genügt, wenn man definirt: Zwei Polygone (von gleicher Seitenzahl) sind ähnlich, wenn sie die **Winkel,** welche von einem Ecke aus in einem bestimmten Sinne der Drehung auf einander folgen, der Ordnung nach gleich haben, und wenn zugleich die von jenem Ecke aus in demselben Sinne der Drehung auf einander folgenden Seiten in dem einen Polygone dasselbe **Verhältniß** haben wie im andern.

Beweis. Es ist erstlich zu zeigen, daß es Polygone gibt, welche den aufgestellten Bedingungen genügen, und zweitens, daß sie dabei einen beliebigen Größenunterschied haben können.

1) Zieht man von einem Ecke eines Polygons aus alle möglichen Diagonalen und durch einen beliebigen Punkt (P) einer (dem Ecke) anliegenden Seite eine Parallele zur nächsten Polygonsseite, durch deren Schnittpunkt mit der ersten Diagonale eine Parallele zur dritten Seite u. s. f., so erfüllt das von den Parallelen abgegrenzte Polygon den Lehrsätzen in 32 Z. und 166 gemäß alle obigen Bedingungen der Aehnlichkeit, und es gibt demnach, da der gewählte Punkt (P) beliebig ist (beispielsweise auch auf der Verlängerung der ersten Seite angenommen werden kann), unendlich viele Polygone, welche einem

gegebenen gegenüber den gestellten Bedingungen der Aehnlichkeit genügen.

2) Der Größenunterschied der beiden Polygone (n-Ecke) besteht in (n — 2) Trapezen. Die Größe eines jeden dieser Trapeze kann dargestellt werden als abhängig von den Dimensionen des gegebenen Polygons und dem Abstande des Punktes P von dem Endpunkte der Seite, auf welcher er angenommen ist. 152. 166. Die Darstellung zeigt, daß durch Aenderung dieses Abstandes allein, jede beliebige Differenz zwischen der Größe der Polygone hergestellt werden kann.

Anmerkung. Ecken ähnlicher Polygone, welchen die in der Definition verlangte Lage zukommt, werden im Folgenden homologe Ecken genannt. Homologe Ecken sind Scheitel gleicher Winkel, aber die Scheitel zweier gleichen Winkel sind nicht nothwendig homologe Ecken. Zwei Seiten ähnlicher Polygone, denen von zwei homologen Ecken aus, im vorausgesetzten Sinne der Drehung herum gezählt, gleiche Ordnungszahlen zukommen, stehen in homologen Gliedern der Proportion und heißen deßhalb homologe Seiten.

182. Lehrsatz.

Zwei Polygone einem dritten ähnlich.

Sind zwei Polygone P_1 und P_2 einem dritten Polygone P_3 ähnlich, so sind sie auch ähnlich unter sich.

Voraussetzung. $P_1 \backsim P_3$
$P_2 \backsim P_3$

Behauptung. $P_1 \backsim P_2$

Beweis. Die Gleichheit der Winkel in P_1 und P_2 folgt sofort durch 5. Bezeichnet man ferner mit a_1, b_1, c_1 .... die auf einander folgenden Seiten des Polygons P_1, und gelten analoge Bezeichnungen für die Seiten der Polygone P_2 und P_3, so gilt der Voraussetzung gemäß:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3}, \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_3}{c_3} \ldots\ldots$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} \ldots\ldots$$

daher nach 5 $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} \ldots\ldots$$

oder mit Rücksicht auf die in 163d erklärte Schreibweise

$$a_1 : b_1 : c_1 \ldots\ldots = a_2 : b_2 : c_2 \ldots\ldots$$

183. Lehrsatz.

Zieht man zu einer Seite des Dreiecks eine Parallele, (welche auf den beiden andern Seiten innere oder äußere Abschnitte macht,) so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen Dreiecke ähnlich. Die parallele Transversale schneidet ein ähnliches Dreieck ab.

Beweis durch 166 und 32 Z.

184. Lehrsatz.

(Erster Aehnlichkeitsfall.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen Dreiecks einem Winkel des anderen gleich ist, und die diesen Winkel im einen Dreiecke einschließenden Seiten sich verhalten, wie die beiden ihn einschließenden Seiten des anderen Dreiecks. Aehnlichkeitsfälle I.

Es sollen $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die beiden Dreiecke sein, A_1, B_1, C_1 die Winkel, a_1, b_1, c_1 die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $\triangle_1$, während die Zeichen A_2, B_2, C_2; a_2, b_2, c_2 analoge Bedeutung für das Dreieck $\triangle_2$ haben.

Voraussetzung. $A_1 = A_2$,
$b_1 : c_1 = b_2 : c_2$.

Behauptung. $\triangle_1 \backsim \triangle_2$.

Beweis. Zunächst könnten die Seiten b_1 und b_2 gleich sein, dann wäre $\triangle_1 \cong \triangle_2$ (48) also auch $\triangle_1 \backsim \triangle_2$. Ist $b_1 \gtrless b_2$ so trage man die eine von beiden (etwa b_2) auf der anderen (b_1) vom Scheitel A_1 aus ab und ziehe durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke eine Parallele zu a_1, so ist zunächst das durch die Parallele abgeschnittene Dreieck ($\triangle$ mit den Seiten a, b, c) dem $\triangle_1$ ähnlich (183).

Eben dieses Dreieck ist aber zugleich dem $\triangle_2$ congruent. Denn da $A_1 = A_2$, die eine der einschließenden Seiten (b) durch Construction gleich b_2, so fehlt nur noch der Nachweis, daß die zweite einschließende Seite (c) der Seite c_2 gleich ist.

Es gilt aber wegen $\triangle \backsim \triangle_1$
$b : c = b_1 : c_1$,
und nach der Voraussetzung $b_1 : c_1 = b_2 : c_2$,

daher $b : c = b_2 : c_2$;
und da $b = b_2$,
folgt $c = c_2$.

Nun ist
$$\begin{array}{rl} & \triangle \backsim \triangle_1 \\ & \triangle \cong \triangle_2 \\ \hline \text{somit} & \triangle_1 \backsim \triangle_2 \ (4). \end{array}$$

185. Lehrsatz.

II. (Zweiter Aehnlichkeitsfall.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen Dreiecks zwei Winkeln des anderen beziehungsweise gleich sind.

Beweis. Man construirt wie in 184. Die Congruenz des construirten Dreiecks $\triangle$ mit dem gegebenen $\triangle_2$ folgt wegen $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$ u. s. w. aus 49.

Zusatz 1. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen an der Grundlinie oder den an der Spitze liegenden Winkel gleich haben.

Zusatz 2. Fällt man im rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so sind die beiden entstandenen Dreiecke unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnlich.

186. Lehrsatz.

III. (Dritter Aehnlichkeitsfall.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks sich zu einander verhalten, wie drei Seiten des anderen.

Voraussetzung. $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$

Beweis. Man construirt wie in 184. Die Congruenz ergibt sich aus dem construirten $b = b_2$ und den Gleichungen
$$c = c_2,$$
$$a = a_2,$$
von welchen jede durch Vergleichung zweier Proportionen abgeleitet wird. Vgl. 184.

187. Lehrsatz.

IV. (Vierter Aehnlichkeitsfall.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen Dreiecks einem Winkel des anderen gleich ist, wenn zugleich zwei diesen Winkel nicht einschließende Seiten des einen Dreiecks sich ebenso verhalten, wie zwei ihn nicht einschließende des andern und dabei die beiden Winkel, welche den proportionirten anliegenden Seiten gegenüberliegen, nicht supplementär sind.

Voraussetzung. $A_1 = A_2$

$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2$$

$$B_1 + B_2 \lesseqgtr 2R.$$

Beweis durch die Construction in 184 und den Congruenzfall (IV) in 51.

Zusatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn das Verhältniß der Hypotenuse zu einer Kathete in beiden gleich groß ist.

188.

Anmerkungen zu den Aehnlichkeitsfällen.

a) Die Form eines Dreiecks ist bestimmt: Bestimmungsstücke der Form des Dreiecks.

1) Durch einen Winkel und das Verhältniß der denselben einschließenden Seiten;

2) durch zwei Winkel;

3) durch die beiden Verhältnisse, in welchen eine Seite zu den beiden anderen steht;

4) durch einen Winkel und das Verhältniß der gegenüberliegenden Seite zu einer anliegenden, sobald noch bekannt ist, ob der der anliegenden Seite gegenüberliegende Winkel spitz oder stumpf ist.

b) Ist die Aehnlichkeit zweier Dreiecke erwiesen, so ist bekannt, daß jeder Winkel und jedes Seitenverhältniß des einen Dreiecks einem Winkel oder Seitenverhältnisse des anderen Dreiecks gleich ist, und es ergibt sich, daß die homologen Glieder der Proportionen gleichen Winkeln gegenüber liegen. Deßhalb sind Seiten ähnlicher Dreiecke, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, homologe Seiten. Homologe Seiten des Dreiecks.

c) Aehnliche Dreiecke können symmetrisch in der Ebene liegen. Dieses ist der Fall, wenn die Scheitel der gleichen Winkel in beiden Dreiecken nicht im nämlichen Sinne der Drehung auf einander folgen. Ein dem Dreiecke $\triangle_1$ ähnliches, symmetrisches Dreieck erhält man, wenn man die Seiten des Dreiecks $\triangle_1$ über ein Eck hinaus verlängert und die Verlängerungen durch eine zur Gegenseite Parallele schneidet. Symmetrielage.

189. Lehrsätze.

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich Homologe Transversalen.

a) zwei zu homologen Seiten gehörige Höhen,

b) zwei Mittelpunktstransversalen homologer Seiten,
c) zwei Halbirungslinien gleicher Winkel

wie zwei homologe Seiten der Dreiecke und auch wie zwei andere der genannten Transversalen, die homologe Seiten theilen.

Die Beweise ergeben sich aus der Aehnlichkeit der durch die Transversalen abgeschnittenen Dreiecke.

Anmerkung. Die Behauptung erstreckt sich auf alle Transversalen, durch welche ähnliche Dreiecke in Dreiecke getheilt werden, welche beziehungsweise ähnlich sind. Solche Transversalen kann man homolog nennen.

190. Lehrsatz.

Verhältniß der Perimeter ähnlicher Dreiecke.

Die Perimeter ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie zwei homologe Seiten oder Transversalen.

Beweis: Die Aehnlichkeit gibt

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

woraus nach 163 d folgt:

$$(a_1 + b_1 + c_1) : a_1 = (a_2 + b_2 + c_2) : a_2 .$$

Das Uebrige nach 163 b und 189.

191. Lehrsatz:

Verhältniß der Fläche.

Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Transversalen.

Beweis. Aus 148 b hat man wegen $\sphericalangle C_1 = C_2$,

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2},$$

Aus $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$

folgt $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$,

durch Substitution

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Das Uebrige nach 189.

192. Lehrsätze.

Aehnlichkeit der Parallelogramme.

Zwei Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich haben, und wenn die den Winkel einschließenden Seiten im einen Parallelogramme sich verhalten wie im anderen.

Beweis. Man ziehe in dem einen Parallelogramme durch den Scheitel des gleichen Winkels die Diagonale, trage eine Seite des anderen auf der homologen des ersteren ab, durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke ziehe eine Pa-

rallele und eine zweite Parallele durch den Schnittpunkt dieser und der Diagonale. Das so construirte Parallelogramm ist dem einen ähnlich und dem anderen congruent.

Zusatz 1. Zwei Rechtecke sind ähnlich,

a) wenn zwei anliegende Seiten des einen Rechtecks sich wie zwei anliegende Seiten des anderen verhalten;

b) wenn die Diagonalen in dem einen Rechtecke den gleichen Winkel mit einander oder mit einer Seite bilden wie im anderen.

Zusatz 2. Zwei Rauten sind ähnlich,

a) wenn sie einen Winkel gleich haben;

b) wenn die Diagonalen der einen Raute sich verhalten wie die Diagonalen der anderen.

193. Lehrsatz.

Aehnlichkeitsfälle der Polygone.

Zwei n=Ecke sind ähnlich,

a) wenn (n — 1) auf einander folgende Seiten des einen Polygons sich verhalten wie (n — 1) auf einander folgende Seiten des anderen, und zugleich die (n — 2) von diesen Seiten gebildeten Winkel in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind, wie im anderen;

b) wenn (n — 1) Winkel (also alle Winkel) des einen Polygons (n — 1) Winkeln des andern der Ordnung nach gleich und wenn zugleich (n — 2) auf einander folgende Seiten des einen Polygons sich verhalten wie die (n — 2) gleichliegenden Seiten des anderen.

Beweis. Man ziehe von einem Ecke des einen Polygons aus alle möglichen Diagonalen, trage eine dem homologen Ecke anliegende Seite des anderen Polygons auf der ihr homologen Seite des ersteren ab, ziehe durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke eine Parallele zur zweiten Seite, durch den Schnittpunkt dieser Parallelen und der ersten Diagonale eine Parallele zur dritten Seite u. s. f., so erhält man ein Polygon, welches dem ersten ähnlich und dem zweiten congruent ist. 181. 84. 85.

194. Lehrsatz.

Zerlegung ähnlicher Polygone.

Aehnliche Polygone werden durch die von homologen Ecken aus gezogenen Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt.

Beweis. Die Aehnlichkeit der von zwei Seiten und einer

Diagonale gebildeten Dreiecke erhellt sofort aus 184. Für die beiden anstoßenden, von einer Seite und zwei Diagonalen gebildeten Dreiecke kann derselbe Aehnlichkeitsfall durch Benützung der schon erwiesenen Aehnlichkeit der vorausgehenden Dreiecke hergestellt werden.

Zusatz. In ähnlichen Polygonen verhalten sich zwei Diagonalen, die homologe Ecken verbinden, wie zwei homologe Seiten oder wie zwei andere solche Diagonalen.

195. Lehrsatz.

Verhältniß der Perimeter.

Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei homologe Seiten oder Diagonalen.

Beweis. Aus der Voraussetzung

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 \ldots\ldots = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 \ldots\ldots$$

leitet man durch 163 d ab

$$(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots\ldots) : a_1 = (a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \ldots\ldots) : a_2$$

und durch Vertauschung der mittleren Glieder die Behauptung. 194 Z.

196. Lehrsatz.

Die Flächen ähnlicher Polygone.

Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen.

Beweis. Theilt man nach 194 die beiden Polygone P_1 und P_2 in die ähnlichen Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_1'$, $\triangle_1'' \ldots\ldots \triangle_2$, $\triangle_2'$, $\triangle_2'' \ldots\ldots$ so gilt nach 191

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$\frac{\triangle_1'}{\triangle_2'} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$

$$\frac{\triangle_1''}{\triangle_2''} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

$$\ldots\ldots$$

die rechtsstehenden Verhältnisse kann man alle durch $\frac{a_1^2}{a_2^2}$ $\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)$ oder durch das Verhältniß der Quadrate zweier Diagonalen ersetzen, weil man nach 163 b 5) eine richtige Proportion erhält, wenn man alle Glieder einer solchen mit derselben Zahl potenzirt. Nachdem diese Substitution gemacht ist, vertausche man die mittleren Glieder, so erhält man links und rechts Brüche von gleichem

Nenner und durch Addition aller Gleichungen die Behauptung.

197. Lehrsatz.

Errichtet man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Polygone, so daß die Seiten des Dreiecks homologe Seiten derselben bilden, so ist das über der Hypotenuse errichtete Polygon der Summe der beiden anderen gleich. (Erweiterung des Pythagoreischen Lehrsatzes.) Aehnliche Polygone über den Seiten des rechtw. Dreiecks.

Beweis. Sind H, K_1, K_2 die ähnlichen Polygone, h, k_1, k_2 die Seiten des Dreiecks, so ist nach 196

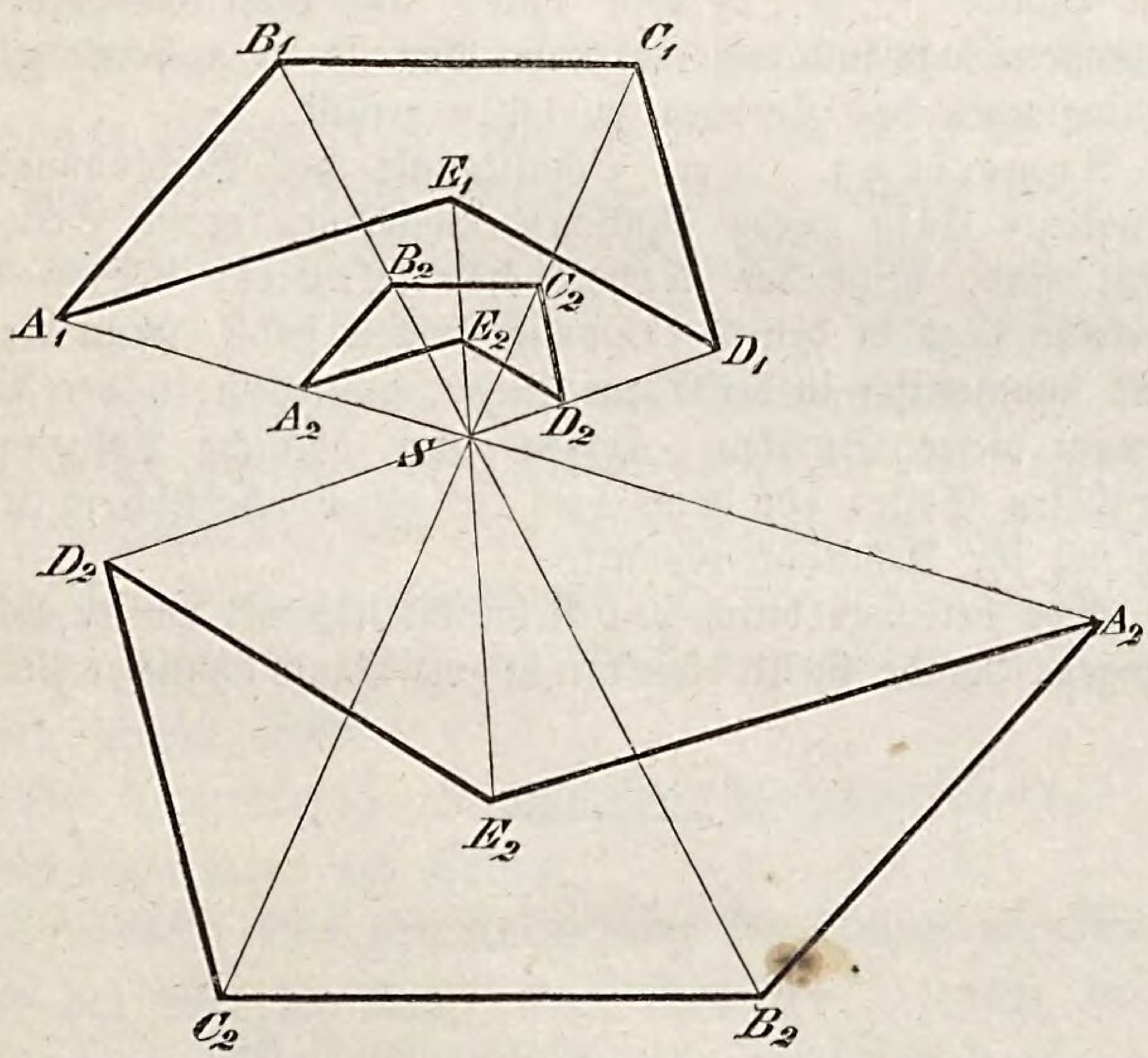
$$H : K_1 : K_2 = h^2 : k_1^2 : k_2^2$$

und $\frac{K_1 + K_2}{H} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{h^2}$ (163 c, 163 b 1 und Sustitution gleicher Verhältnisse). Daraus folgt durch 156 die Behauptung.

198. Lehrsatz.

Liegen zwei ähnliche Polygone so, daß zwei homologe Seiten parallel sind, so ist Der Aehnlichkeitspunkt.

a) jede Seite (und Diagonale) der ihr homologen parallel,
b) die Geraden, welche man durch je zwei homologe Ecken zieht, schneiden sich alle in einem Punkte.



Beweis. Zu a). Ist $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$, und man verbindet B_1 mit B_2, so erhält man an den genannten Parallelen bei Symmetrielage der Polygone gleiche Wechselwinkel, außerdem gleiche correspondirende Winkel, und subtrahirt man diese von den gleichen Winkeln B_1 und B_2 der Polygone, so bleibt die Gleichung der beiden Wechselwinkel (beziehungsweise correspondirenden), welche die Seiten $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ mit der Verbindungslinie $B_1 B_2$ bilden. Somit $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2$ u. s. w.

Zwei homologe Diagonalen sind Seiten ähnlicher Dreiecke, von welchen zwei Seiten dem eben Gesagten gemäß parallel sind.

Zu b). Es wird gezeigt, daß die von zwei beliebigen homologen Ecken N_1 und N_2 nach dem Schnittpunkte (S) zweier Verbindungslinien ($A_1 A_2$ und $B_1 B_2$) gezogenen Strecken in einer Geraden liegen, indem man die hiefür in 169 c gestellten Bedingungen als erfüllt nachweist.

Die Diagonale $A_1 N_1$ ist zunächst der Diagonale $A_2 N_2$ parallel (a).

$$\begin{array}{rl} \text{Ferner gilt} & A_1 N_1 : A_1 B_1 = A_2 N_2 : A_2 B_2 \quad (194\ \text{Z.}) \\ \text{und} & \underline{A_1 B_1 : A_1 S \;=\; A_2 B_2 : A_2 S \quad (166\ \text{c})} \\ \text{folglich} & A_1 N_1 : A_1 S = A_2 N_2 : A_2 S, \\ \text{oder} & A_1 N_1 : A_2 N_2 = A_1 S : A_2 S \end{array}$$

d. h. die parallelen Strecken $A_1 N_1$ und $A_2 N_2$ die von den Punkten A_1 und A_2 der Geraden $A_1 S A_2$ ausgehen, verhalten sich wie die Abstände dieser Punkte von S. Somit liegen die drei Punkte N_1, N_2, S nach 169 c auf einer Geraden. Für Symmetrielage sind wie aus dem Beweise zu a hervorgeht, die Bedingungen des Zusatzes zu 169 c erfüllt.

Anmerkung. Der Schnittpunkt der Verbindungslinien homologer Ecken zweier ähnlichen Polygone, deren Seiten parallel sind, heißt der Aehnlichkeitspunkt der Polygone. Derselbe liegt in den Verbindungsstrecken selbst, wenn die Polygone symmetrisch in der Ebene liegen, außerdem in der Verlängerung dieser Strecken. Haben zwei ähnliche Polygone von parallelen Seiten ein homologes Eck gemeinschaftlich, so ist dieses zugleich ihr Aehnlichkeitspunkt.

Jede beliebige durch den Aehnlichkeitspunkt zweier Polygone gezogene Gerade theilt dieselben in zwei Paare ähnlicher Polygone.

III. Abschnitt.

Proportionen zwischen Strecken, welche von Kreisbögen begrenzt sind.

199. Lehrsatz.

Nimmt man innerhalb oder außerhalb eines Kreises einen Punkt M an und zieht durch denselben eine Gerade, welche die Peripherie in zwei Punkten (A und B) schneidet, so entsteht die Sehne AB, welche durch den Punkt M in innere oder äußere Abschnitte getheilt ist. Produkte der Sehnenabschnitte und der Secantenabschnitte.

Das Produkt der inneren oder äußeren Abschnitte, in welche der Punkt M die Sehne AB theilt, ist ebenso groß, als das Produkt der inneren, beziehungsweise äußeren Abschnitte, in welche eine beliebige andere Sehne durch M getheilt wird.

Beweis. Die Schnittpunkte der beiden durch den Punkt M gezogenen Geraden mit dem Kreise können so verbunden werden, daß Dreiecke entstehen, deren Aehnlichkeit bei Rücksicht auf 108 Zus. 1 aus 185 erhellt.

Durch Anwendung von 188b folgt die Behauptung, die übrigens für jeden der beiden Fälle besonders bewiesen werden muß.

200. Lehrsätze.

(Besondere Fälle.)

a) Ist von dem äußeren Theilpunkte (M) der Sehne eine Tangente an den Kreis gezogen, so kann man sich letztere dadurch aus einer Secante entstanden denken, daß die beiden Schnittpunkte zusammengerückt sind, der Unterschied der beiden Faktoren des Produktes (die Sehne) Null, folglich diese Faktoren unter sich und der zwischen M und dem Berührungspunkte liegenden Strecke gleich geworden sind. Dadurch wird der Satz wahrscheinlich:

Das Quadrat der Tangente, welche man von irgend einem Punkte M aus an den Kreis zieht, ist dem Produkte der äußeren Abschnitte gleich, in welche der Punkt eine beliebig nach derselben gerichtete Sehne theilt.

(Die Tangente ist die mittlere Proportionale zu den äußeren Abschnitten der Sehne.) Mittlere Proportionalen.

Beweis. Die zur Aufstellung des Satzes angeführte Induction hat nicht die Kraft eines Beweises; derselbe folgt vielmehr aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, welche man erhält, wenn

man den Berührungspunkt mit den Endpunkten der Sehne verbindet. 110a.

b) Denkt man sich durch M einen Durchmesser in innere Abschnitte getheilt, und die zweite Sehne senkrecht auf dem Durchmesser, so sind die beiden Abschnitte derselben gleich groß, und es resultirt der Satz:

Fällt man von einem beliebigen Punkte der Peripherie eine Senkrechte auf den Durchmesser, so ist diese die mittlere Proportionale zu den Abschnitten des Durchmessers.

Der Beweis liegt hier in der Ableitung; ein zweiter Beweis folgt aus 108 Zus. 2 und 155a.

c) Jede Sehne ist die mittlere Proportionale zu dem durch ihren Endpunkt gezogenen Durchmesser und ihrer Projection auf denselben. 108 Zus. 2. 155b.

Anmerkung. Das Produkt der beiden Abschnitte, welche ein Punkt auf einer Sehne macht, ist demnach nur von der Lage des Punktes, nicht aber von der Lage und Größe der Sehne abhängig. Man darf deßhalb dieses Produkt als ein Bestimmungsstück der Lage des Punktes gegen den Kreis ansehen und nennt es die Potenz des Punktes.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche die gleiche Potenz besitzen, ist die mit der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte um diesen beschriebene Kreislinie.

201. Lehrsätze.

Umkehrungen von 199 und 200.

a) Theilt ein Punkt, in welchem sich zwei Strecken oder deren Verlängerungen schneiden, die Strecken so beide in innere oder beide in äußere Abschnitte, daß das Produkt der Abschnitte der einen Strecke dem Produkte der Abschnitte der andern gleich ist, so liegen die vier Endpunkte der beiden Strecken in der Peripherie eines Kreises.

Beweis. Die Rechnung ergibt, daß der vierte Endpunkt ebenso weit vom Theilpunkte entfernt ist, als der Punkt, in welchem die durch die 3 anderen Punkte gelegte Peripherie den nämlichen Strahl schneidet.

b) Schneidet man von dem Schnittpunkte zweier Strahlen aus auf dem einen eine Strecke ab, deren Quadrat dem Produkt der zwei auf dem anderen Strahle abgeschnittenen Strecken gleich ist, und man legt durch die drei Endpunkte dieser Strecken einen Kreis, so berührt die erste Strecke den Kreis in ihrem Endpunkte. 184. 110b.

202. Lehrsätze.

Ist der Durchmesser eines Kreises harmonisch getheilt, so verhalten sich a) die von einem beliebigen Punkte der Peripherie nach den Endpunkten des Durchmessers gezogenen Sehnen wie die zwei ihnen anliegenden inneren (oder äußeren) Abschnitte; b) die von einem Punkte der Peripherie nach dem inneren und äußeren Theilpunkte gezogenen Strecken verhalten sich wie ein innerer Abschnitt zu dem homologen äußeren. Der Durchmesser ist harmonisch getheilt.

Beweis. Da die conjugirten Strahlen auf einander senkrecht stehen, sind die Winkel halbirt (174 c).

203. Lehrsatz.

a) Zieht man von einem Punkte aus die beiden Tangenten an den Kreis und einen Durchmesser, so ist dieser Durchmesser im Durchschnittspunkte der Tangenten und im Schnittpunkte der Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, harmonisch getheilt. Der äußere Theilpunkt ist Schnittpunkt der Tangente.

Beweis. Die beiden Nebenwinkel, welche die Verbindungssehne mit der Tangente bildet, werden durch die vom Berührungspunkte nach den Endpunkten des Durchmessers gezogenen Sehnen halbirt. (110 a, 108 Zus. 1). 172. 173.

Anmerkung. Man kann also den Durchmesser dadurch harmonisch theilen, daß man entweder in dem willkürlich angenommenen inneren Theilpunkte eine Senkrechte und in deren Endpunkt eine Tangente errichtet, oder daß man von dem willkürlich angenommenen äußeren Theilpunkte aus die Tangenten und die Verbindungssehne der Berührungspunkte zieht.

b) Die Hälfte einer harmonisch getheilten Strecke ist die mittlere Proportionale zu den Entfernungen ihres Mittelpunkts vom inneren und äußeren Theilpunkte.

Anmerkung. Ist demnach der innere Theilpunkt einer gegebenen Strecke durch seine Entfernung von deren Mittelpunkt bekannt (oder willkürlich angenommen), so läßt sich die Entfernung des äußeren Theilpunktes durch Rechnung finden.

204. Lehrsätze.

a) Ist ein Durchmesser D_1 in den Punkten M und N harmonisch getheilt und man errichtet in M und N Senkrechte auf D_1, so ist ein zweiter Durchmesser D_2 durch seinen Schnittpunkt mit einer dieser Senkrechten und den Fußpunkt der vom andern Theilpunkte auf ihn gezogenen Senkrechten harmonisch getheilt. Pol und Polare.

Beweis durch 185 und 203b.

b) Ist ein Durchmesser in den Punkten M und N harmonisch getheilt und man errichtet in M und N Senkrechte auf dem

Durchmesser, so wird jede durch den einen dieser Punkte gezogene Sehne durch ihn und ihren Schnittpunkt mit der im andern Theilpunkte errichteten Senkrechten harmonisch getheilt.

Beweis. Man construire das durch die Endpunkte des Durchmessers und der Sehne bestimmte Viereck, ziehe die Diagonalen und ergänze es zum vollständigen Vierseite. Dadurch entsteht ein zweites vollständiges Vierseit, von welchem der Durchmesser und die Sehne zwei Diagonalen sind. Die dritte Diagonale theilt beide harmonisch (180), geht somit durch den Punkt M, und es bleibt nur noch nachzuweisen, daß sie in M auf dem Durchmesser senkrecht steht. 26α. Sie halbirt den Winkel, den die von den Endpunkten der Sehne nach M gezogenen Geraden bilden, weil der Durchmesser dessen Nebenwinkel halbirt (174c), und sie zu diesem der conjugirte harmonische Strahl ist.

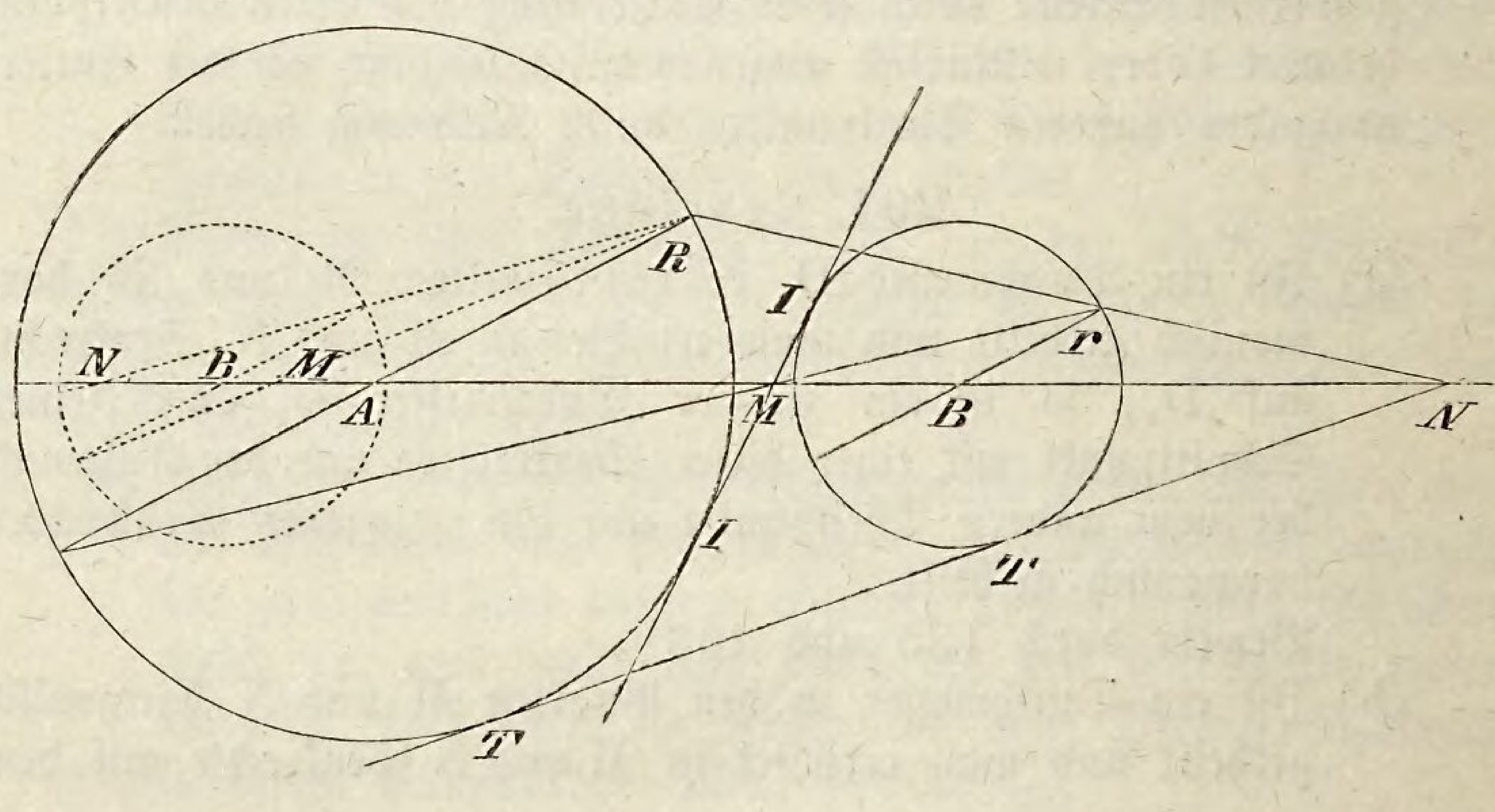
Erklärung. Wegen dieser reciproken Beziehungen nennt man den äußeren Theilpunkt N des Durchmessers den Pol zu der im innern Theilpunkte M errichteten Senkrechten und diese selbst die Polare zu N. Ebenso ist der innere Theilpunkt M Pol zu der durch N gezogenen Polare.

Wie lassen sich mit Hilfe dieser beiden Begriffe die vorstehenden Sätze kürzer fassen?

205. Lehrsatz.

Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise.

Zieht man zu zwei Kreisen von ungleichen Radien ($R > r$) die Centrale AB, ferner zwei parallele Durchmesser, so bestimmen die Endpunkte derselben ein Trapez. Sowohl die Diagonalen dieses Trapezes schneiden sich in einem für alle Paare paralleler Durchmesser gleichen Punkte der Centrale (in M), als auch die Verlängerungen der nicht parallelen Seiten



(in N); und die Centrale ist durch diese beiden Schnittpunkte harmonisch getheilt.

Beweis. Die Verbindungslinie der Endpunkte von R und r schneidet die Centrale im Punkte N oder M, je nachdem diese Strecken auf der nämlichen oder auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen. Da nun

$$\frac{NB}{NA} = \frac{r}{R} = \frac{MB}{MA}$$

so liegen auch die anderen beiden Endpunkte der Durchmesser mit N, beziehungsweise M in gerader Linie (169 c).

Durch dieselben Proportionen ist die harmonische Theilung ausgesprochen und ersichtlich, daß z. B. der innere Theilpunkt M nur durch das Größenverhältniß der Radien bestimmt, von der Neigung der Durchmesser gegen die Centrale unabhängig, und somit für jedes Paar paralleler Durchmesser der nämliche ist.

Erklärung. Die Punkte M und N heißen die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise; M ist der innere, N der äußere Aehnlichkeitspunkt.

206. Lehrsätze.

1) Berühren sich zwei (ungleiche) Kreise von außen oder von innen, so ist der Berührungspunkt der innere oder der äußere Aehnlichkeitspunkt. 120. 121. 43 Zus. 2.
2) Zieht man durch einen Aehnlichkeitspunkt eine Gerade, welche die beiden Kreise schneidet, so sind die durch die (4) Schnittpunkte gezogenen Durchmesser paarweise parallel (1 zu 3, 2 zu 4).
3) Die gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise geht durch einen Aehnlichkeitspunkt; durch welchen?
4) Zieht man von einem Aehnlichkeitspunkte aus eine Tangente an den einen Kreis, so ist diese zugleich Tangente an den anderen Kreis.
5) Berühren sich zwei (ungleiche) Kreise von außen, so ist die zwischen den Berührungspunkten liegende Strecke der gemeinschaftlichen Tangente die mittlere Proportionale zu den beiden Durchmessern. 185.

Anhang II.

Constructionen.

207.

Die folgenden Constructionsaufgaben haben hauptsächlich Verwandlung und Theilung von Figuren zum Gegenstande.

Verwandlung. Unter der Verwandlung einer Figur versteht man Herstellung einer neuen Figur, welche mit der gegebenen gleichen Inhalt hat, in der Form aber von derselben verschieden ist.

Berechnung. Algebraische Analysis. Die Lösung solcher Aufgaben kann von der Auffindung einer Strecke abhängig gemacht werden, sei es, daß diese selbst Dimension der neuen Figur oder des abzugrenzenden Theiles werden, oder (als Entfernung) zur Bestimmung eines gesuchten Punktes dienen soll. In denjenigen Fällen, wo die Lösung einer eindeutig bestimmten Aufgabe von dem Auffinden einer Strecke abhängig ist, ist diese durch die gegebenen Merkmale und gestellten Forderungen eindeutig bestimmt und kann häufig durch Anwendung der Sätze, welche von den Beziehungen zwischen den Dimensionen der Figuren handeln, berechnet werden, d. h. es läßt sich ein mathematischer Ausdruck auffinden, der angibt, in welcher Weise die gesuchte Strecke von den gegebenen abhängig ist (Algebraische Analysis).

Im Folgenden wird zunächst gelehrt, wie sich aus einer solchen Formel das Verfahren zur Construction der Strecke ableiten läßt.

208. Erklärung.

Charakter algebraischer Ausdrücke, welche geom. Größen darstellen. Ein in allgemeinen Zahlzeichen dargestellter Ausdruck heißt vom ersten Grade, wenn man nach Substitution eines einzigen Zahlzeichens (a) für alle und Verwandlung der negativen Vorzeichen in positive, durch Ausführung aller angedeuteten Rechnungsoperationen das substituirte Zahlzeichen a in der ersten Potenz mit irgend einer absoluten (rationalen oder irrationalen) Zahl als Coefficienten erhält.

Vom ersten Grade sind z. B. die Ausdrücke $a \pm b$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{ab}{c} \pm d$, $\frac{3\,abc}{2\,df}$, $3\sqrt{ab}$, $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\,bc}{df}}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{a^2 - 2\,b^2 + cd}$, $a\sqrt{2} + b\sqrt{\frac{c}{3d}} + \sqrt{m^2 - n^2}$, $\frac{3\sqrt{c^3}}{\sqrt{a}}$, $\sqrt[3]{a^2 b}$.

Ein Ausdruck ist vom 2^{ten}, 3^{ten} . . . n^{ten} Grade, wenn

man durch das obige Verfahren a^2, a^3, ... a^n mit einer absoluten Zahl als Coefficienten erhält.

Vom zweiten Grade sind z. B. die Ausdrücke $3a^2$, $2ab$, $\frac{abc}{5d}$, $\sqrt{a^4 \pm b^4}$, $\frac{a\sqrt{a^3+b^3}}{\sqrt{c}}$.

Sind alle Glieder eines Polynoms von gleich hohem Grade, so heißt das Polynom homogen.

Bezeichnen alle allgemeinen Zahlzeichen, welche in einem Ausdrucke vorkommen, Strecken, und sind zugleich alle darin vorkommenden Strecken mit allgemeinen Zahlzeichen bezeichnet, so kann der Ausdruck nur dann eine geometrische Größe darstellen, wenn er homogen ist. (Controle der Rechnung.) Die Größe einer Strecke ist durch einen Ausdruck vom ersten Grade, die einer Fläche durch einen Ausdruck vom zweiten Grade gegeben. Vgl. 149 Zus. 2.

Die Aufgabe, eine Strecke zu construiren, welche durch einen mathematischen Ausdruck bestimmt ist, beschränkt sich demnach darauf, einen Ausdruck vom ersten Grade zu construiren. Schließt man dritte und höhere Wurzeln als nicht mehr elementar construirbar aus, so lassen sich alle vorkommenden Fälle auf folgende zurückführen: x zu construiren, wenn

$$x = a \pm b;\ x = \frac{ab}{c};\ x = \sqrt{ab};\ x = \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

und a, b, c gegebene Strecken sind.

209. Construction der Grundformen.

383. Die Strecke x durch Construction zu finden, wenn $\frac{ab}{c}$.

$$x = \frac{ab}{c}.$$

Lösung. Da $c:a = b:x$, so ist zu c, a, b die vierte Proportionale zu finden. Man trage c und a vom Scheitel eines beliebigen Winkels aus auf den Schenkeln ab, ziehe die Verbindungslinie der Endpunkte, setze b als Verlängerung an die homologe Seite c an, und ziehe durch den Endpunkt derselben eine Parallele zur Verbindungslinie (166 b). Auch durch 166 a.

Zusatz 1. $x = \frac{a^2}{c}$, oder die dritte Proportionale zu c $\frac{a^2}{c}$.

und a wird entweder ebenso gefunden, oder indem man aus c und a als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck construirt und im Scheitel C eine Senkrechte auf der Hypotenuse errichtet (155 a).

Zusatz 2. Diese Constructionen lösen unmittelbar die Aufgabe: Ein Rechteck zu finden, welches eine gegebene Seite (c) hat und einem gegebenen Rechtecke (ab) oder Quadrate (a^2) gleich ist.

384. Die Strecke x durch Construction zu finden, wenn

$\sqrt{ab}$.

$$x = \sqrt{ab}.$$

Lösungen. a) Da $x^2 = ab$, $a : x : b$, so ist zu a und b die mittlere Proportionale zu finden. Man errichte den Halbkreis über der größeren (a) der beiden Strecken, trage vom Endpunkte derselben aus die kleinere (b) auf a ab und errichte im Endpunkte von b eine Senkrechte, dann ist x die Sehne, deren Projection b ist (200 c).

b) Ebenso gut durch 200 b, wobei der Kreis um $a + b$ als Durchmesser beschrieben und im Grenzpunkte beider die Senkrechte errichtet wird.

c) Nicht viel umständlicher durch 200 a, wobei der Kreis um $(a - b)$ beschrieben und an ihn die Tangente gezogen wird.

Zusatz. Damit ist die Aufgabe gelöst: Die Seite eines Quadrates zu finden, welches einem gegebenen Rechtecke oder Dreiecke gleich ist. (Ein Rechteck oder Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.)

385. Die Strecke x durch Construction zu finden, wenn

$\sqrt{b^2 \underset{-}{+} c^2}$.

$$\text{a) } x = \sqrt{b^2 + c^2},$$
$$\text{b) } x = \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Im ersteren Falle ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten b und c sind, im zweiten Falle ist x die eine Kathete eines rechtw. Dreiecks, dessen Hypotenuse b und dessen andere Kathete c ist.

Zusatz. Damit ist die Aufgabe gelöst: Ein Quadrat zu finden, welches a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist, ferner wird dadurch die homologe Seite eines Polygons gefunden, welches zwei gegebenen Polygonen, deren

homologe Seiten b und c sind, ähnlich und a) der Summe, b) der Differenz dieser Polygone gleich sein soll.

210.

Zurückführung der Ausdrücke vom ersten Grade auf die Grundformen.

Um die Construction anderer Ausdrücke vom ersten Grade auf die Grundformen zurückzuführen, hat man sie im Allgemeinen in die Form eines Polynoms zu bringen, dessen einzelne Glieder von der Form $\frac{a_1\, a_2\, a_3 \, \ldots \, a_{n-1}\, a_n}{b_1\, b_2\, b_3 \, \ldots \, a_{n-1}}$ sind, wobei unter a und b construirbare Strecken verstanden sind. Diese Strecken sind entweder gegeben oder sie erhalten die Form von Quadratwurzeln, deren Radikand entweder ein Produkt zweier Faktoren (vom ersten Grade) oder die Summe oder Differenz zweier Quadrate ist.

Beispiele.

386. $x = \frac{3\,abcd}{2\,fgh}$.

Lösung. Man construire $z_1 = \frac{cd}{h}$, dann ist $x = \frac{3\,abz_1}{2\,fg}$, hierauf construire $z_2 = \frac{bz_1}{g}$, dann wird $x = \frac{3\,az_2}{2\,f}$ und somit die vierte Proportionale zu 2f, 3a, z_2.

387. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lösung. $x = \sqrt{a^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2}$

388. $x = a\sqrt{2}$, $y = z\sqrt{3}$, $z = a\sqrt{5}$, $u = a\sqrt{7}$ ....

Lösungen. $x = \sqrt{a^2 + a^2}$, $y = \sqrt{(2\,a)^2 - a^2}$, $z = \sqrt{(2a) + a^2}$, $u = \sqrt{(4a)^2 - (3a)^2}$.

Anmerkung. Da $b = \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-1}{2}\right)^2$, so läßt sich jede Zahl als Differenz zweier Quadrate darstellen; daß sie als Summe mehrer Quadrate dargestellt werden kann, folgt leicht daraus, daß man zu der zunächst unterhalb b liegenden Quadratzahl das Fehlende in lauter 1 addiren kann.

389. $x = \sqrt{\frac{a^3 - b^3}{c}}$

Lösung. $x = \sqrt{\left(\sqrt{a \cdot \frac{a^2}{c}}\right)^2 - \left(\sqrt{b \cdot \frac{b^2}{c}}\right)^2}$,

oder $x = \sqrt{(a - b)\left(\frac{a^2}{c} + \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{c}\right)}$

390. $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$

Lösung. $x = \sqrt{a^2 + \left[\sqrt{b\sqrt{b^2 + \left(\frac{c^2}{b}\right)^2}}\right]^2}$

211.

Vier fundamentale Aufgaben über Verwandlung von Dreiecken.

Verlegung der Spitze.

391. Den geometrischen Ort für die Spitzen aller Dreiecke zu construiren, welche mit einem gegebenen Dreiecke dieselbe Grundlinie und gleichen Inhalt haben.

Die Lösung ist eine durch die Spitze zur Grundlinie Parallele.

392. Die Spitze eines Dreiecks mit Beibehaltung seiner Größe und der Lage seiner Grundlinie in einen gegebenen Punkt zu verlegen.

Lösung. Zieht man durch den Punkt eine Parallele zur Grundlinie, und verlängert, wenn es nöthig ist, eine Seite bis zu dieser Parallelen, so ergibt sich die neue Grundlinie als vierte Proportionale zur verlängerten Seite, ursprünglichen Seite und gegebenen Grundlinie. (148 b) C 391.

Die Gegenseite hat eine vorgeschriebene Richtung.

393. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem die diesem Winkel gegenüberliegende Seite eine vorgeschriebene Richtung hat.

Lösung. Sind a und c die Seiten, welche den beizubehaltenden Winkel B einschließen, und man zieht durch A eine Parallele AD *) zu der vorgeschriebenen Richtung, so werden die einschließenden Seiten x und y des gesuchten Dreiecks nach 148 b durch die Gleichung

$$xy = ac,$$

und nach 166 a durch

$$\frac{x}{y} = \frac{BD}{c}$$

---

*) Bezüglich der Ausführung der Construction vgl. die Figur zu C 419.

mit Bekanntem verbunden, und es folgt

$$x^2 = BD \cdot a.$$

Determination. Die Construction ist unmöglich, wenn die beiden von B aus laufenden Strecken BD und a entgegengesetzte Richtung haben. Die Rechnung gibt derartige Determinationen, wenn man Strecken von entgegengesetzter Richtung entgegengesetzte Vorzeichen beilegt.

394. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem die dem Winkel gegenüberliegende Seite durch einen gegebenen Punkt geht. Die Gegenseite geht durch einen geg. Punkt.

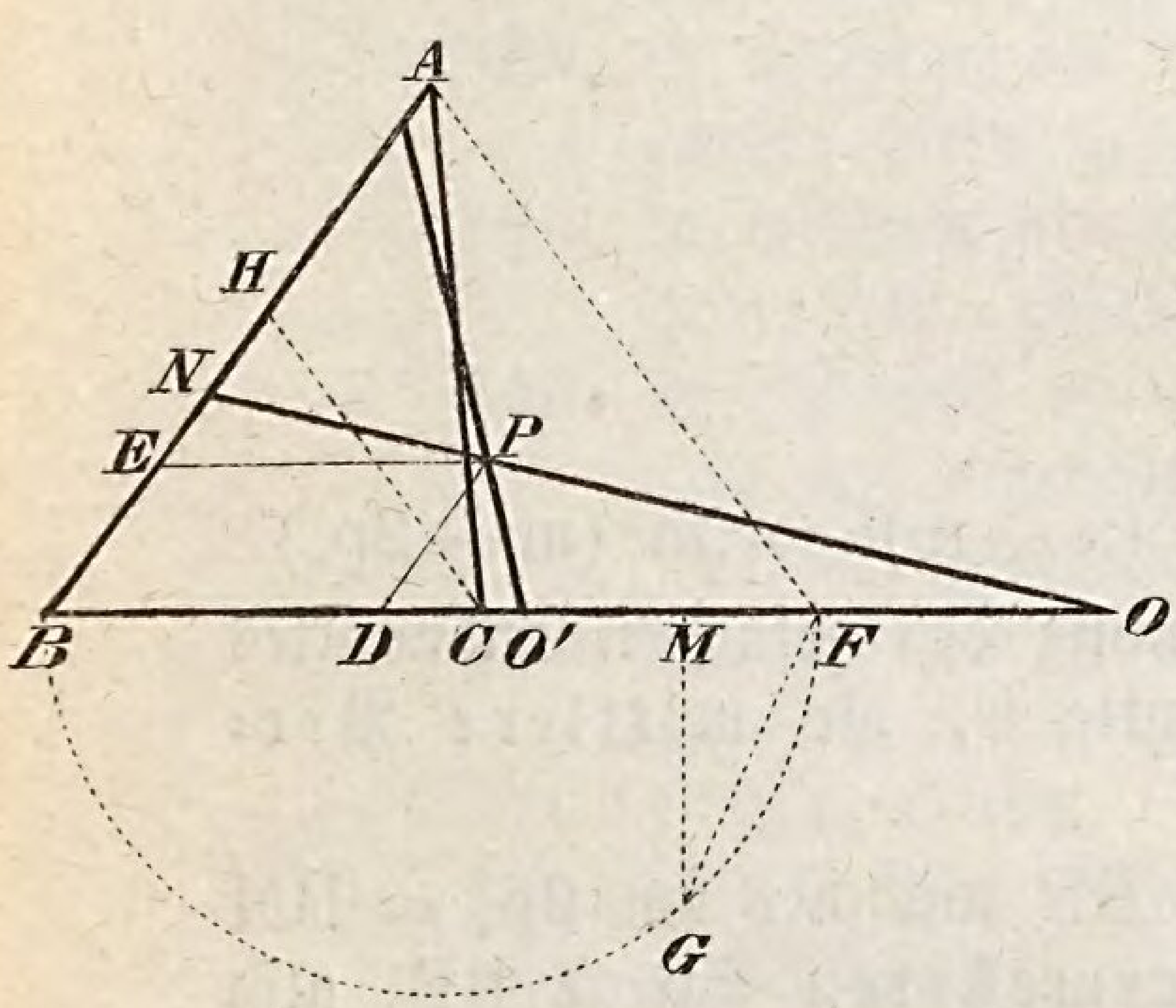
Lösung. Man unterscheide, ob der gegebene Punkt P innerhalb oder außerhalb des Winkelraumes B liegt.

Sind a, c, b die Seiten des gegebenen Dreiecks A C B, und bezeichnet man mit BN = y, BO = x die dem Winkel B anliegenden Seiten des gesuchten, so muß zunächst sein (148 b)

$$xy = ac \; . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

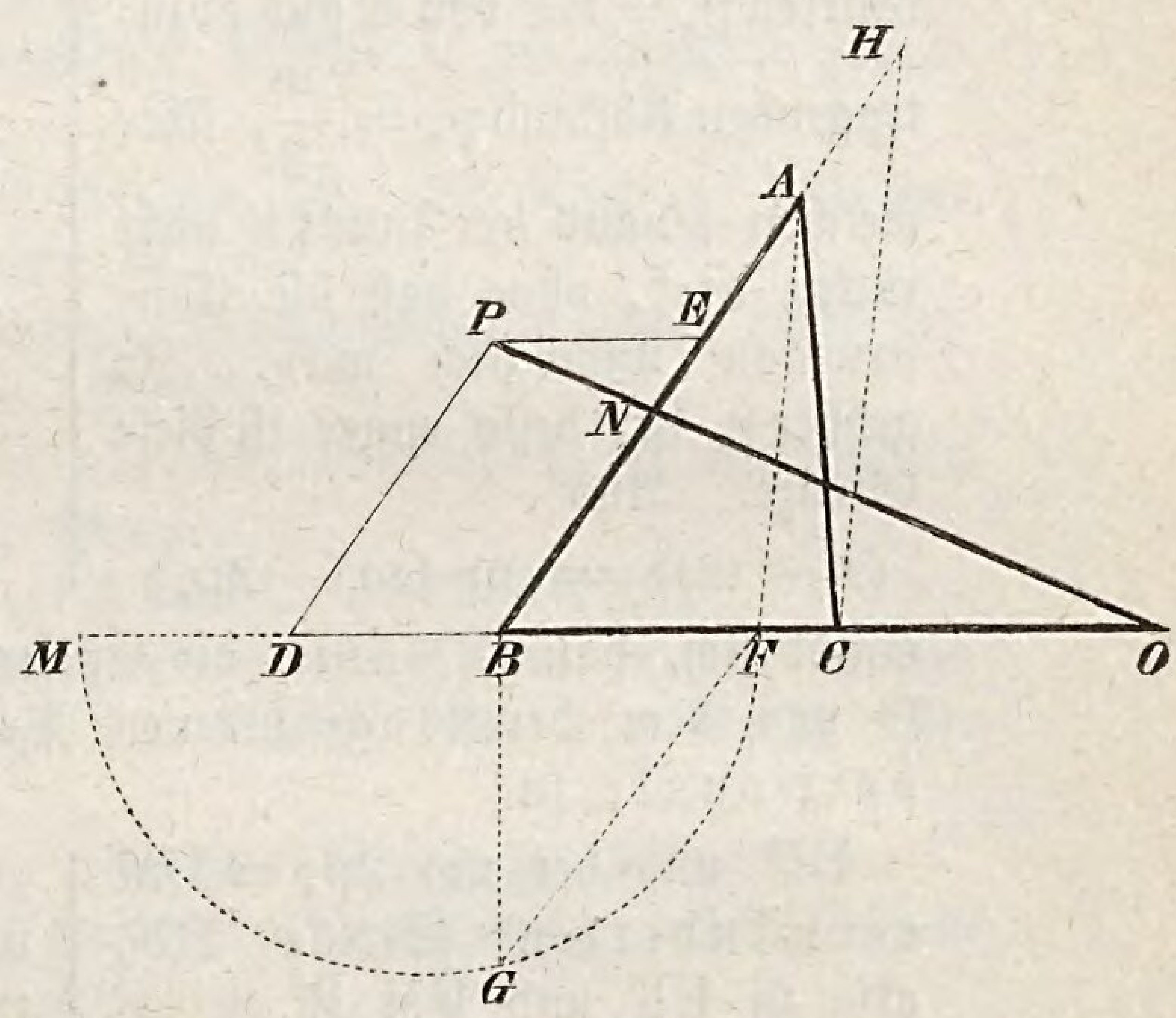
Durch die Lage von P sind die mit a und c parallelen Strecken $PE = DB = p_a$ und $PD = EB = p_c$ gegeben, und man hat nach 166 c für

P innerhalb des Winkelraumes



$$\frac{x}{y} = \frac{x - p_a}{p_c} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2$$

P außerhalb des Winkelraumes



$$\frac{x}{y} = \frac{x + p_a}{p_c} \; . \; . \; . \; . \; (2$$

Durch Multiplikation von (1 und (2

$$x^2 = \frac{ac}{p_c}(x - p_a)$$

$$x^2 = \frac{ac}{p_c}(x + p_a)$$

$$\left(x-\frac{ac}{2p_c}\right)^2=\left(\frac{ac}{2p_c}\right)^2-p_a\frac{ac}{p_c} \quad\Bigg|\quad \left(x-\frac{ac}{2p_c}\right)^2=\left(\frac{ac}{2p_c}\right)^2+p_a\frac{ac}{p_c}$$

Die Ausführung der Construction verlangt zunächst

$$\frac{a\,c}{2\,p_c}=m,$$

was mit Leichtigkeit als vierte Proportionale gefunden wird

$$2\,BE : BC = BA : m$$

$$m = BF.$$

$$(x-m)^2=m^2-2mp_a$$

Daraus ergibt sich zunächst eine Determination für die Lage des Punktes P. Die Construction wird unmöglich, wenn $m < 2p_a$. Da nun m von den Dimensionen a, c des gegebenen Dreiecks und der Parallelen p_c abhängt, so gibt es für jedes $p_c = B\,E$ einen aus der Gleichung

$$m - 2p_a = o$$

zu berechnenden und auf der Parallelen $p_a = EP$ von E aus abzutragenden Abstand $p_a = \frac{m}{2}$, über welchen hinaus der Punkt P nicht rücken darf, ohne daß die Construction unmöglich wird. Je größer p_c ist, desto enger ist diese Grenze. Aus

$$(x-m)^2 = m\,(m-2p_a)$$

$$(x-m)^2=m^2+2mp_a$$

Die Möglichkeit der Construction hat hier nur die eine Beschränkung, daß P nicht im Scheitelwinkel des gegebenen Winkels liegen darf. (p_c und dadurch m negativ.)

$$(x-m)^2 = m\,(m+2p_a)$$

ergibt sich, daß $(x-m)$, die Entfernung des gesuchten Endpunktes O von dem bereits gefundenen Punkte F, die mittlere Proportionale zu

BF und der um $2p_a = BM$ verminderten Strecke BF, also zu BF und FM ist.

BF und der um $2p_a = BM$ vermehrten Strecke BF, also zu BF und FM ist.

Construction.

Ziehe von P aus die Parallelen PE, PD, verdopple BE, so daß BH = 2BE, ziehe HC und durch A eine Parallele zu HC, so ist BF gefunden.

Verdopple BD, so daß BM = 2BD und suche durch Halb-

kreisconstruction die mittlere Proportionale zu BF und FM, so ist FG der Abstand des gesuchten Punktes O von F.

Die Aufgabe hat hier zwei Lösungen, welche man erhält, wenn man FG einmal nach rechts, das andere Mal nach links hin von F aus abträgt.

(Entsprechend dem doppelten Vorzeichen der Wurzel

$FO = \pm\sqrt{m(m - 2p_a)}$)

Hier entspricht den gestellten Forderungen nur der eine Werth von x, den man durch additives Ansetzen von FG an BF erhält.

Anmerkung. Der Fall, in welchem P im Winkelraume liegt, unterscheidet sich von dem anderen in der Behandlung nur dadurch, daß dort $- p_a$ an die Stelle von $+ p_a$ gesetzt ist. Die Betrachtung der Figur zeigt, daß in beiden Fällen diese Strecken vom Punkte P aus nach entgegengesetzten Richtungen laufen.

212. Aufgaben über Verwandlung von Dreiecken.

Ein gegebenes Dreieck soll mit Beibehaltung einer Seite a in ein anderes verwandelt werden, Uebungen.

395. welches eine gegebene Seite (b) hat;
396. welches einen der Seite a anliegenden Winkel (B) von gegebener Größe hat;
397. in welchem ein gegebener Winkel A der Seite a gegenüber liegt (C 29);
398. in welchem die Projicirende (h_b) der Seite a auf eine andere Seite gegeben ist (C 28);
399. in welchem die Mittelpunktstransversale (m_b) einer andern Seite gegeben ist. 62 c.
400. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln
  a) mit gegebener Grundlinie,
  b) mit gegebenem Schenkel. C 383. C 391.
401. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel an der Spitze hat. C 391. C 393.
402. Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.
403. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.
404. Ein Dreieck in eine Raute zu verwandeln
  a) von gegebener Seite,
  b) von gegebener Diagonale,
  c) von gegebenem Winkel.
405. Ein Dreieck in ein Trapez zu verwandeln, von welchem die Höhe und eine der Parallelen gegeben sind.

406. Ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

213.

Verwandlung von Polygonen.

Wegschaffung eines Eckes.

407. Ein n = Eck in ein (n — 1) = Eck zu verwandeln.

Lösung. Man schneidet durch eine Diagonale ein Dreieck ab und verlegt durch eine Parallele die gegenüberliegende Spitze in die Verlängerung einer angrenzenden Polygonsseite.

Anmerkung. Durch Fortsetzung dieser Construction läßt sich jedes Polygon in ein Dreieck, also auch in ein Rechteck oder Quadrat verwandeln.

408. Die gebrochene Grenze zweier Grundstücke in eine geradlinige zu verwandeln. C 407.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unbestimmt, es kann noch die Forderung erfüllt werden, die geradlinige Grenze von einem gegeb. Punkte ausgehen zu lassen.

Ein Polygon von gegeb. Inhalte und gegeb. Form.

409. Es sind zwei Polygone P_1 und P_2 gegeben, man soll ein drittes Polygon P construiren, welches dem P_1 gleich und dem P_2 ähnlich ist. [P_1 soll in ein Polygon von gegebener Form verwandelt werden.]

Lösung. Da die Construction eines dem P_2 ähnlichen Polygons keine Schwierigkeit bietet (181), so ist nur die Größe derjenigen Seite (x) von P zu ermitteln, welche einer bestimmten Seite a_2 von P_2 homolog werden soll.

In dem gegebenen Falle lassen sich die Seiten q_1 und q_2 der Quadrate ermitteln, welche den beiden gegeb. Polygonen gleich sind. Dann ist

$$P = P_1 = q_1^2$$

$$P_2 = q_2^2$$

und nach 196

$$P : P_2 = x^2 : a_2^2$$

$$\overline{q_1^2 : q_2^2 = x^2 : a_2^2}$$

$$x = \frac{q_1}{q_2} a_2$$

Anmerkung. Zur Lösung der Aufgabe genügt es, das Größenverhältniß $\frac{P_1}{P_2}$ der gegebenen Polygone zu kennen, welches direct durch eine rationale oder irrationale Zahl gegeben sein kann. Im ersteren Falle hat man $x^2 = \frac{m}{n} a_2^2 = mn\left(\frac{a_2}{n}\right)^2$, und kann mn nach C 388 in die Summe oder Differenz zweier

Quadrate zerlegen. C 385. Im zweiten Falle ist

$$x^2 = \sqrt{\frac{m}{n} \cdot a^2} = \frac{a}{n}\sqrt{mna^2}. \quad C\,384.$$

214. Theilung von Strecken.

410. Eine Strecke so zu theilen, daß sich die Theile wie die Zahlen m, p, q, ... r verhalten. Verhältnißmäßige Theilung.

Lösung. Man theile die Strecke (a) in (m + p + q + ... r) gleiche Theile (C 8), so sind die einzelnen Theile von der Größe

$$l = \frac{a}{m + p + q + \ldots . r}$$

und die Endpunkte der Strecken m l, (m + p) l, (m + p + q) l . . . . die verlangten Theilpunkte.

411. Eine gegebene Strecke (AB) harmonisch zu theilen. Harmonische Theilung.

Lösung. Die allgemeine Aufgabe ist unbestimmt, sie wird bestimmt, wenn ein Theilpunkt gegeben ist.

a) Bei gegebenem inneren Theilpunkte (M) den äußeren (N) zu finden.

α) Man ziehe durch M eine beliebige in M halbirte Strecke, verbinde die Endpunkte derselben durch Gerade mit A und B und ziehe durch den Schnittpunkt derselben eine Parallele zur Strecke. 174 a.

β) Errichte über AB den Halbkreis und in M eine Senkrechte. Die im Endpunkte dieser Senkrechten errichtete Tangente geht durch N (203a).

b) Bei gegebenem äußeren Theilpunkte (N) den inneren zu finden.

α) Beschreibe um AB als Durchmesser einen Kreis und ziehe an diesen von N aus die beiden Tangenten. Die Verbindungssehne der Berührungspunkte geht durch M.

β) Errichte über AN den Halbkreis, verbinde einen beliebigen Punkt des Bogens mit A und B und halbire den Peripheriewinkel.

412. Eine gegebene Strecke a so in zwei Theile zu theilen, daß der eine Theil die mittlere Proportionale zum anderen und der ganzen Strecke ist. [Theilung in media et extrema ratione, Goldener Schnitt] Goldener Schnitt.

Lösung. Aus $x^2 = a\,(a - x)$ folgt

$$x^2 + ax = a^2,$$
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

daraus ergibt sich $x + \frac{a}{2}$ als Hypotenuse des rechtw. Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{a}{2}$ sind.

Anmerkung. Diese Construction kann benützt werden, den Winkel $\frac{2}{5}R$ zu construiren, indem man über x ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Schenkel a errichtet. Der Beweis folgt aus der Aehnlichkeit dieses Dreiecks mit dem kleineren, welches man durch Abtragen von $x - a$ auf dem Schenkel (von der Grundlinie aus) construirt (184).

Dadurch ist man im Stande $\frac{n}{5}R$, $\frac{n}{5.2^k}R$, und wegen der Möglichkeit von $\frac{n}{3.2^k}R$ auch $\frac{n}{3.5.2^k}R$ zu construiren, wobei in jedem einzelnen Falle n und k beliebige ganze Zahlen bedeuten.

215. Theilung von Polygonen durch Gerade, welche von einem gegebenen Ecke aus gehen.

Das Dreieck, von einem Ecke aus getheilt.

413. Ein Dreieck von einem gegebenen Ecke aus in Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen $m, p, q \ldots r$ verhalten.

Lösung. Man theile die Gegenseite in diesem Verhältnisse (C410), und ziehe von dem Ecke Gerade nach den Theilpunkten.

414. Von einem Dreiecke durch eine Gerade, welche durch ein gegebenes Eck geht, einen Theil von gegebener Größe abzuschneiden.

Lösung. a) Ist die Größe des Theils in Form einer ganzen oder gebrochenen Anzahl von Flächeneinheiten (Quadratmetern) gegeben, so hat man im Allgemeinen, da die Höhe h bekannt ist, für die unbekannte Grundlinie x

$$xh = \frac{m}{n}1^2$$

wobei m und n ganze Zahlen sind. Man findet aus

$$x = \frac{(m.1).1}{(nh)},$$

daß x die vierte Proportionale zu (nh), der einfachen und der m-fachen Längeneinheit ist. Es kann zweckmäßig sein, wo möglich, m in Faktoren zu zerlegen und diese zu vertheilen.

b) Ist das Verhältniß des gesuchten Theiles zum Ganzen gegeben und zwar α) rational, so ist die Aufgabe mit C 413 identisch, β) irrational, so ist wenn a die Grundlinie des Dreiecks bezeichnet, $x = a\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt{mna^2}$, was sich durch C 388 oder C 384 erledigt.

415. Ein Viereck von einem Ecke aus durch Gerade in gegebenem Verhältnisse zu theilen. Das Viereck, von einem Ecke aus getheilt.

Lösung. Man theile die gegenüberliegende Diagonale in dem gegebenen Verhältnisse und verlege die in der Diagonale liegenden Ecken der Theile durch Parallele zur anderen Diagonale in den Umfang.

416. Ein Polygon von einem Ecke aus durch Gerade in gegebenem Verhältnisse zu theilen. Das Polygon von einem Ecke aus getheilt.

Lösung. Ist a die Seite des Quadrates, welches dem gegebenen Polygone inhaltsgleich ist, und soll die Theilung im Verhältnisse der Zahlen m, n, p erfolgen, so hat das Dreieck, welches dem ersten der verlangten Theile gleich ist und zugleich die Höhe (h) des ersten von der Diagonale abgeschnittenen Dreiecks hat, die Grundlinie

$$x = \frac{m}{m+n+p} \cdot \frac{a^2}{h}.$$

Diese Grundlinie kann kleiner, eben so groß oder größer sein als die des ersten Dreiecks. Im letzten Falle wird der erste Theil größer als das erste Dreieck, und der Ueberschuß ist ein Dreieck, welches die erste Diagonale zur Grundlinie hat, dessen Spitze also leicht durch Parallelenconstruction (C 391) in den Umfang verlegt wird.

Da von dem Reste des Polygons ein Stück $\frac{n}{m+n+p} \cdot a^2$ abzuschneiden ist, so darf man nur das beschriebene Verfahren wiederholen.

417. Ein Viereck von einem gegebenen Ecke aus durch Gerade Uebungen.

a) zu halbiren,
b) in drei gleiche Theile zu theilen,
c) im Verhältnisse der Zahlen 3 und 5 zu theilen,
d) in drei Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen 1, 2, 3 verhalten.

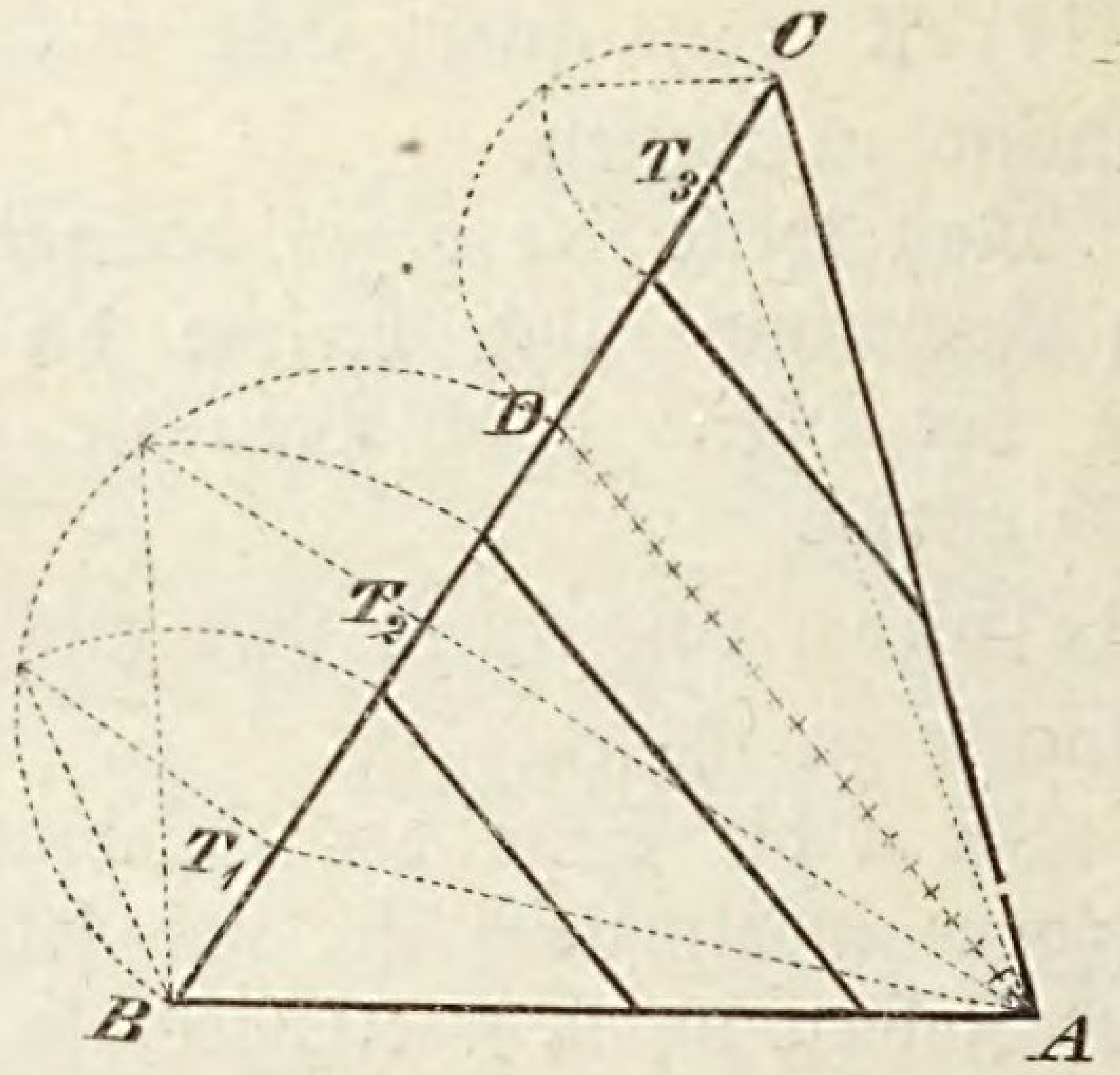
418. Ein Fünfeck von einem gegebenen Ecke aus durch Gerade

a) zu halbiren,
b) in drei gleiche Theile zu theilen,
c) in drei Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen 1, 3, 5 verhalten.

216. Theilung durch Parallele von vorgeschriebener Richtung.

Das Dreieck, durch Parallele getheilt.

419. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu theilen, welche einer gegebenen Geraden parallel laufen.



Lösung. Man ziehe durch ein Eck eine Parallele (AD) zu der gegebenen Geraden und wähle dieses Eck so, daß die Parallele in das Dreieck fällt. Theilt man die Gegenseite in dem gegebenen Verhältnisse, so erhält man die Grundlinien von Dreiecken, welche die verlangte Größe haben. Man verwandle nun der Reihe nach die Dreiecke, welche auf einer Seite von AD liegen, BAT_1, BAT_2 nach C 393, und beginne dann die Verwandlungen von der andern Seite her, dann bleibt um AD herum das dem mittleren Dreiecke T_2AT_3 gleiche Fünfeck übrig.

Die Ausführung vereinfacht sich dadurch, daß der Halbkreis BD zur Construction aller auf dieser Seite nöthigen mittleren Proportionalen genügt.

Uebungen.

420. Ein Dreieck zu halbiren
 a) durch eine Gerade, welche einer Seite parallel ist;
 b) durch eine Gerade, welche auf einer Seite senkrecht steht.

421. Ein Dreieck durch Gerade, welche einer bestimmten Seite desselben parallel sind,
 a) im Verhältnisse der Zahlen 3, 5 zu theilen,
 b) im Verhältnisse der Zahlen 2, 3, 5 zu theilen.

422. Ein Dreieck durch Gerade, welche auf einer bestimmten Seite desselben senkrecht stehen,
 a) im Verhältnisse der Zahlen 1, 3 zu theilen,
 b) im Verhältnisse der Zahlen 5, 2, 7, 3 zu theilen.

423. Ein Dreieck durch Gerade, welche einer Mittelpunktstransversale parallel sind, in 4 gleiche Theile zu theilen.

424. Ein Parallelogramm durch parallele Gerade von vorgeschriebener Richtung in gegebenem Verhältnisse zu theilen. Das Parallelogramm, durch Parallele getheilt.

Lösung. Man ziehe durch zwei gegenüberliegende Ecken, die man passend auswählt, Parallele zu der vorgeschriebenen Richtung und theile eine der Mittelinien in dem gegebenen Verhältnisse. Durch diejenigen Theilpunkte, welche zwischen den gezogenen Parallelen liegen, ziehe man parallele Theilungslinien, durch die übrigen aber Gerade von den gegenüber liegenden Ecken aus. Die durch die letztere Construction erhaltenen Dreiecke werden nach C 393 verwandelt.

425. Ein Parallelogramm durch eine Gerade von vorgeschriebener Richtung zu halbiren. Uebungen.

426. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Seite parallel sind, im Verhältnisse der Zahlen m, n, p zu theilen.

427. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Diagonale parallel sind, im Verhältnisse der Zahlen 2, 3 zu theilen.

428. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche auf einer Seite senkrecht stehen, im Verhältnisse der Zahlen 1, 5, 3, 1 zu theilen.

429. Ein Trapez durch parallele Gerade in gegebenem Verhältnisse zu theilen, wenn die Theilungslinien Das Trapez, durch Parallele getheilt.

a) einer der convergenten Seiten parallel sein sollen;

b) einer Diagonale parallel sein sollen;

c) auf den parallelen Seiten senkrecht stehen sollen.

Die Lösungen gelingen nach der in C 424 angedeuteten Methode.

430. Ein Trapez in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu theilen, welche den parallelen Seiten parallel sind.

Lösung. Ist s die Summe der Verhältnißzahlen, m eine derselben, $b > d$ die Parallelen, h die Höhe, so ist die Lösung gefunden, wenn die Länge der Parallelen y ermittelt ist, welche ein Trapez von dem Inhalte

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{b + d}{2} \cdot h$$

abschneidet. Ist x die Höhe des Theiles, so gilt demnach

$$\frac{y + d}{2} \cdot x = \frac{m}{s} \frac{b + d}{2} \cdot h,$$

ferner nach 74 a u. 189: $\frac{x}{h} = \frac{y - d}{b - d}$

daraus $$y^2 = d^2 + \frac{m}{s}(b^2 - d^2),$$
und eine einfache Construction aus
$$y = \sqrt{b\left[\frac{d^2}{b} + \frac{m}{s}\left(b - \frac{d^2}{b}\right)\right]}.$$

431. Ein Trapez durch Parallele zu den parallelen Seiten
a) zu halbiren,
b) im Verhältnisse der Zahlen 3, 2, 1 zu theilen.

432. Eine Strecke AB = a und die beiden Winkel A und B, welche zwei divergente Strahlen mit der Strecke bilden, sind gegeben; man soll durch eine zu AB Parallele ein Trapez von gegebenem Inhalte abschneiden.

Lösung. Hat das Dreieck, welches den gegebenen Inhalt besitzt, die Grundlinie g, die Höhe h, ist x die Höhe, y die zweite Parallele des gesuchten Trapezes, so ist zunächst
$$gh = (a + y)\,x.$$
Verlängert man die Strahlen über A u. B hinaus, so entsteht ein Dreieck von bekannter Höhe h_1 und Grundlinie a, und es ist
$$\frac{x}{h_1} = \frac{y - a}{a}.$$
Die beiden Gleichungen geben verbunden
$$y^2 = a\left(a + \frac{gh}{h_1}\right).$$

Anmerkung. Ist $(A + B) < 2R$, so ist $(-h_1)$ an die Stelle von h_1 zu setzen und die Aufgabe hat eine Determination. Die Lösung der vorstehenden Aufgabe gibt in Verbindung mit C 416 und C 393 die Mittel, ein Polygon durch Parallele von beliebiger Richtung in gegebenem Verhältnisse zu theilen.

217. Theilung von einem Punkte aus.

Das Dreieck vom Umfange aus,

433. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu theilen, welche von einem in einer Seite (a) gelegenen Punkte (P) aus gehen. C 413 (Theilung von a). C 391 (Parallele zu AP).

von einem Punkte innerhalb,

434. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu theilen, welche von einem innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte (P) aus gehen. C 392 (Verlegung nach P). C 413. C 391.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unbestimmt, so lange nicht die Richtung einer Theilungslinie gegeben ist. Ist letzteres der

Fall, so nehme man sie als Seite des construirten Dreiecks, dessen Spitze in P liegt.

435. Ein Polygon in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu theilen, welche von einem im Umfange oder innerhalb gegebenen Punkte aus gehen.

Erledigt sich ohne Schwierigkeit nach der Anleitung in C 416 oder C. 434.

436. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu theilen, welche von einem außerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte (P) aus gehen. von einem Punkte außerhalb getheilt.

Lösung. Man theile das Dreieck in dem gegebenen Verhältnisse nach C 413 von dem Scheitel C des Winkels aus, in dessen Winkelraum P liegt und verwandle die erhaltenen Dreiecke nach C 394 in solche, deren Grenzlinien statt nach C nun nach P gerichtet sind. Wie in C 419 verfährt man auch hier am besten so, daß man den ∢ B für die auf der einen Seite von PC liegenden Dreiecke beibehält, für die übrigen den ∢ A.

Vierter Theil.

Eingeschriebene und umschriebene Polygone.

Cyclometrie.

I. Abschnitt.

Die linearen Dimensionen eingeschriebener und umschriebener Polygone.

218. Erklärung.

Man sagt von einem Polygone, es sei einem Kreise eingeschrieben, wenn seine Ecken in der Peripherie liegen, seine Seiten demnach Sehnen sind. Den Kreis nennt man in diesem Falle dem Polygone umschrieben.

Ein Polygon heißt dem Kreise umschrieben, wenn seine Seiten Tangenten des Kreises sind. Den Kreis nennt man in diesem Falle dem Polygone eingeschrieben.

Aus dem Bisherigen (56, 95) geht hervor, daß jedem Dreiecke ein Kreis eingeschrieben und umschrieben werden kann, ferner wurde (109, 100) als erforderlich und hinreichend erkannt, daß im einzuschreibenden Vierecke zwei gegenüberliegende Winkel

supplementär, im Tangentenvierecke hingegen die Summen der Gegenseiten gleich seien.

Im Folgenden werden auf die allgemeine Frage: Welche Bedingungen muß ein Polygon erfüllen, damit es einem Kreise eingeschrieben oder umschrieben werden könne, und durch welche Eigenschaften zeichnen sich solche Polygone vor anderen aus? einige specielle Antworten gegeben.

219. Lehrsatz.

Möglichkeit des eingeschrieb. und umschrieb. Kreises.

Um und in jedes reguläre Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. Der Schnittpunkt der senkrechten Halbirungslinien zweier anliegenden Seiten ist a) von allen Ecken, b) von allen Seiten gleichweit entfernt. Berücksichtigt man, daß der Polygonswinkel halbirt ist, so folgt a) aus 48, b) aus 49.

Zusatz 1. Die Mittelpunkte des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons fallen in einen Punkt.

Zusatz 2. Die vom Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen Strahlen halbiren die Polygonswinkel, und je zwei benachbarte schließen gleiche Centriwinkel ein, welche zu den Polygonswinkeln supplementär sind.

Zusatz 3. Die vom Mittelpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen halbiren die Seiten des umschriebenen Polygons, und je zwei benachbarte schließen das Supplement des Polygonswinkels ein.

Zusatz 4. Die Ecken, beziehungsweise Berührungspunkte des eingeschriebenen oder umschriebenen regulären n-Ecks theilen die Peripherie in n gleiche Theile.

220. Lehrsätze.

Herstellung des eingeschrieb. und umschrieb. Polygons.

a) Theilt man die Peripherie in n gleiche Theile und zieht

α) die Verbindungsstrecken der Theilpunkte,

β) in jedem Theilpunkte eine Tangente an den Kreis,

so erhält man

α) ein eingeschriebenes,

β) ein umschriebenes reguläres n-Eck.

Beweis zu α) durch 105, 43, 112 Nr. 11.

zu β). Die Winkel sind gleich als Supplemente gleicher Centriwinkel; zur Gleichheit der Seiten verhilft, daß der an den Berührungspunkt gezogene Radius die Seite halbirt (49).

b) Zieht man zu den Seiten eines eingeschriebenen regulären n-Ecks parallele Tangenten, so begrenzen diese ein umschriebenes reguläres n-Eck.

Der Beweis wird auf a) zurückgeführt.

Zusatz. Das von den parallelen Tangenten begrenzte reguläre n-Eck ist dem nach β construirten congruent.

c) Zieht man die auf den Seiten des eingeschriebenen regul. n-Eckes senkrechten Radien und verbindet die Endpunkte mit den nächstliegenden beiden Ecken, so erhält man ein eingeschriebenes reguläres 2n-Eck.

Legt man in den Punkten, in welchen die vom Centrum nach den Ecken eines umschriebenen regulären n-Eckes gezogenen Strecken die Kreislinie schneiden, Tangenten an den Kreis, so entsteht ein umschriebenes reguläres 2n-Eck.

Zusatz. Die Seite des eingeschriebenen regulären 2n-Eckes ist größer als die halbe Seite des n-Eckes, der Umfang des ersteren Polygons größer als der des letzteren. Die Seite des umschriebenen regulären 2n-Eckes ist kleiner als die halbe Seite des n-Eckes, der Umfang des ersteren Polygons kleiner als der des letzteren.

221. Lehrsätze.

Bedingungen, unter denen eingeschr. und umschr. Polyg. regulär sind.

a) Ist ein eingeschriebenes Polygon gleichseitig, so ist es regulär.

b) Ist ein eingeschriebenes Polygon gleichwinklig und von ungerader Seitenzahl, so ist es regulär.

Beweis. Man ziehe die Radien nach den Ecken. Diese bilden gleichschenklige Dreiecke und theilen die Polygonswinkel. Der Satz ist erwiesen, wenn die beiden Theile eines beliebigen Polygonswinkels als gleich erkannt sind (112 Nr. 12). Sind diese Winkel, in einem Sinne herum gezählt,

$$A_1 = \alpha_1 + \beta_1$$
$$A_2 = \alpha_2 + \beta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \alpha_n + \beta_n$$

so folgt leicht $\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_4 = \alpha_5 \ldots = \beta_{2r} = \alpha_{2r+1}$

Ist nun n eine ungerade Zahl, also von der Form $(2r+1)$, so ist

$$\alpha_{2r+1} = \alpha_1$$

und nach 43 $\beta_{2r+1} = \alpha_1$

somit A_{2r+1} durch den Radius halbirt.

c) Ist ein umschriebenes Polygon gleichwinklig, so ist es regulär.

d) Ist ein umschriebenes Polygon gleichseitig und von ungerader Seitenzahl, so ist es regulär.

Der Beweis nach dem Muster in b) geführt, gibt zum Resultate, daß eine beliebige Seite im Berührungspunkte halbirt ist. Der obige gilt Wort für Wort, wenn man unter A die Seite, unter α und β deren Theile versteht.

Gleichungen zwischen den linearen Dimensionen der eingeschriebenen und umschriebenen Polygone.

222. Lehrsatz.

Das Dreieck.

Die zur Seite a gehörige Höhe (h_a) eines eingeschriebenen Dreiecks ist die vierte Proportionale zu dem Durchmesser und den beiden anderen Seiten.

Behauptung. $2r : b = c : h_a$

Beweis. Man zieht den Durchmesser durch A und wendet 108 Zus. 2, 108 Zus. 1, 185 an.

223. Lehrsatz.

Die Winkelhalbirungstransversale.

Bezeichnet w_a die Transversale, welche den Winkel A halbirt, b u. c die den Winkel einschließenden Seiten, m und n die Abschnitte der Gegenseite, so ist

$$w_a^2 = bc - mn$$

Beweis. Man verlängert w_a bis zur Peripherie des umschriebenen Kreises und wendet 199 und 185 an.

Zusatz. Da wegen $m + n = a$ und $\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$,

$$n = \frac{ac}{b+c}, \quad m = \frac{ab}{b+c}$$

so läßt sich gleich der Höhe (161) und der Mittelpunktstransversale (160 Nr. 3) auch die Halbirungslinie des Winkels durch die drei Seiten ausdrücken:

$$w_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,(a+b+c)\,(b+c-a)}.$$

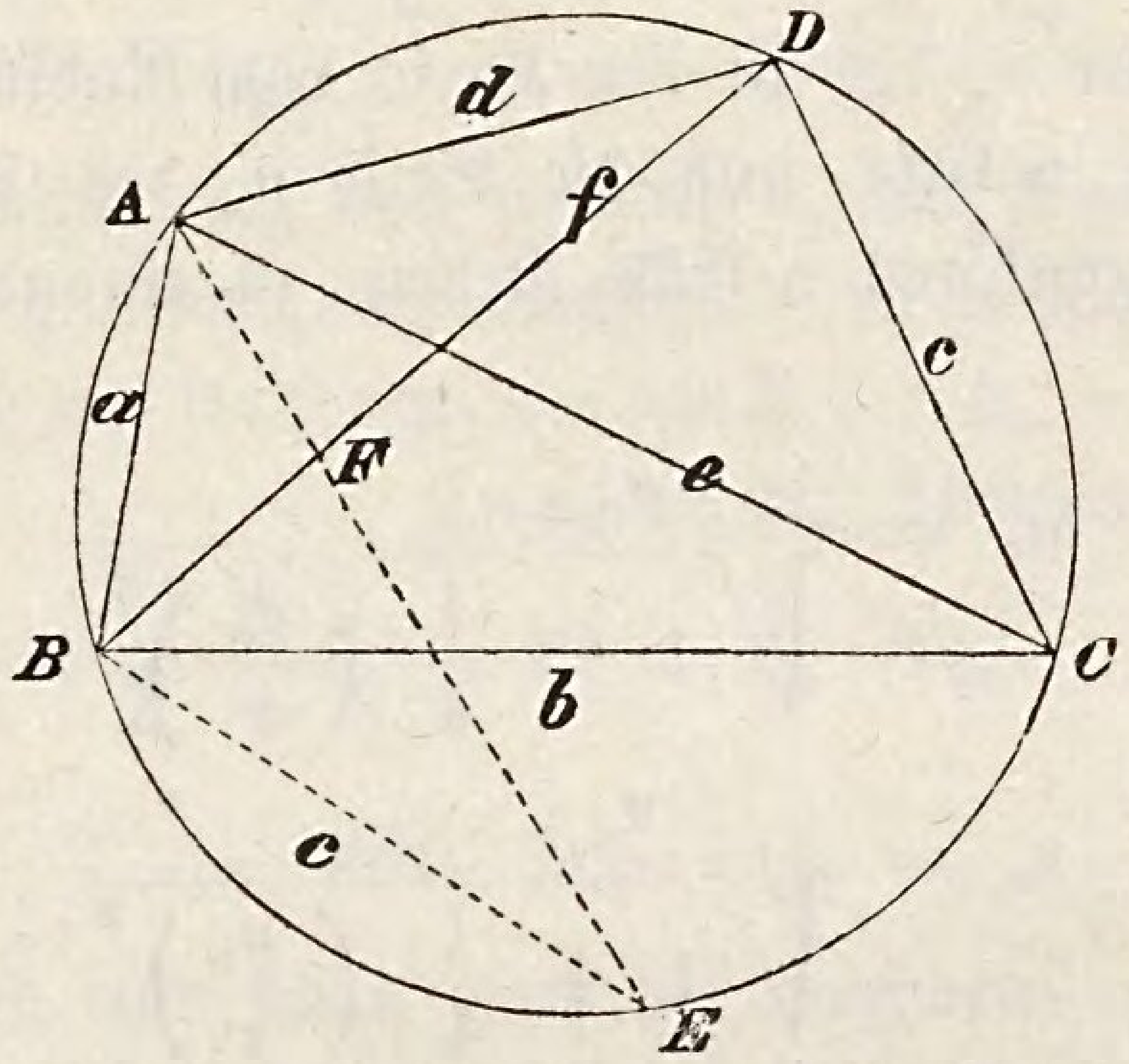
224. Lehrsätze.

Sehnenviereck.

a) Im Sehnenvierecke ist das Produkt der beiden Dia-

gonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüber liegenden Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz.*) Produkt der Diagonalen.

Behauptung. $ef = ac + bd$



Beweis. Trage c von B aus als Sehne ein, ziehe AE. Diese theilt die Diagonale f in F. $\triangle AFB \backsim ADC$, $\triangle AFD \backsim ABC$. Durch Addition der Werthe, welche man aus hiernach geltenden Proportionen für BF und DF erhält, kommt man auf die Behauptung.

b) Im Sehnenvierecke verhalten sich die Diagonalen wie die Summen der Produkte der in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Seiten.

Behauptung. $e : f = (ad + bc) : (ab + cd)$. Verhältniß der Diagonalen.

Beweis. Zieht man die Höhen h_e und h'_e auf die Diagonale e, h_f und h'_f auf f, so erhält man als doppelten Ausdruck der Fläche des Vierecks

$$\frac{1}{2} e h_e + \frac{1}{2} e h'_e = \frac{1}{2} f h_f + \frac{1}{2} f h'_f$$

Nach 222 ist: $h_e = \frac{cd}{2r}$, $h'_e = \frac{ab}{2r}$, $h_f = \frac{ad}{2r}$, $h'_f = \frac{bc}{2r}$.

Substitution führt auf die Behauptung.

Zusatz. Durch Verbindung der Gleichungen in a) und b) erhält man: Werthe der Diagonalen.

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

*) Ptolemäus, Astronom in Alexandria 140 n. Chr.

Beide Werthe gehen in einander über, wenn man b mit d vertauscht.

225. Lehrsätze.

Beziehungen zw. den Seiten der eingeschrieb. und umschrieb. Polygone.

a) die Seite s_n des in den Kreis vom Radius r eingeschriebenen regulären n-Ecks und die Seite u_n des demselben Kreise umschriebenen regulären n-Ecks stehen zu einander in der Beziehung:

$$u_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

oder

$$s_n = \frac{u_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{u_n}{r}\right)^2}},$$

wie aus 185 Zus. 1 und 156 erhellt.

Anmerkung. Die vom Centrum auf die Seit s_n gefällte Senkrechte, deren Länge $\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$ ist, heißt Apothema.

b) die Seite s_n steht zu der Seite s_{2n} des eingeschriebenen regulären 2n-Eckes in der Beziehung:

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

oder $s_n = 2s_{2n}\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2}$.

Ableitung. Man drückt die Verlängerung des Apothema doppelt aus, einmal nach 156, dann als Differenz des Radius und des Apothema. 156.

c) Die Seite u_n steht zu der Seite u_{2n} des umschriebenen regulären 2n-Eckes in der Beziehung:

$$u_n = \frac{2u_{2n}}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{u_{2n}}{r}\right)^2}$$

oder

$$u_{2n} = \frac{4r^2}{u_n}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{u_n}{r}\right)^2}\right]$$

Ableitung algebraisch aus a) und b) oder unmittelbar geometrisch.

Zusatz. Durch Elimination des Radius leitet man folgende einfache Beziehungen zwischen den Seiten der vier genannten regulären Polygone ab:

$$u_{2n} = \frac{s_n\, u_n}{s_n + u_n}, \quad s_{2n}^2 = \frac{s_n\, u_{2n}}{2},$$

welche nach Ermittelung von u_n und s_n mit Vortheil zur Fortführung der Rechnung (oder Construction) benützt werden.

Setzt man die Umfänge $n\, s_n = \Sigma_n$, $n\, u_n = Y_n$, Beziehung zwischen den Umfängen.

$2\, n\, s_{2n} = \Sigma_{2n}$, $2\, n\, u_{2n} = Y_{2n}$,

so folgt $$Y_{2n} = \frac{2\, \Sigma_n\, Y_n}{\Sigma_n + Y_n}, \quad \Sigma_{2n}^2 = \Sigma_n \,.\, Y_{2n}.$$

226. Lehrsatz.

Die Seiten und somit auch die Perimeter regulärer n-Ecke verhalten sich wie die Radien (r) der ihnen umschriebenen und wie die Radien (ϱ) der ihnen eingeschriebenen Kreise. 181. 195.

$$s_n : s_n' = \Sigma_n : \Sigma_n' = r : r' = \varrho : \varrho' \,.$$

227. Seitenlänge eingeschriebener und umschriebener regulärer Polygone.

Seitenlänge.

a) Für das reguläre Dreieck ist

$$s_3 = r\sqrt{3}, \quad u_3 = 2\, r\sqrt{3}$$

b) Für das reguläre Viereck ist

$$s_4 = r\sqrt{2}, \quad u_4 = 2\, r$$

c) Für das reguläre Sechseck ist

$$s_6 = r, \quad u_6 = \tfrac{2}{3}\, r\sqrt{3}$$

d) Für das reguläre Zehneck ist

$$s_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Ableitung. Der Centriwinkel beträgt $\frac{2}{5}$ R oder 36^0. Somit wird s_{10} erhalten, wenn man den größeren Theil des durch den goldenen Schnitt getheilten Radius als Sehne aufträgt. C 412.

e) Für das reguläre Fünfeck ist

$$s_5 = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

wie sich aus d) und 225 b ergibt.

f) Für das reguläre Fünfzehneck ist

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right]$$

Ableitung. Der Centriwinkel dieses Polygons ist $\frac{4}{15}$ R oder $24^0 = 60^0 - 36^0$, woraus sich die Construction der Seite mit Hilfe von c) und d) ergibt. Um zur Berechnung 224a verwenden zu können, ergänze man das durch die Construction erhaltene Dreieck zum Sehnenvierecke mittelst eines Durchmessers, welcher durch den gemeinschaftlichen Endpunkt von s_{10} und s_6 geht. 108 Zus. 2. 156. Man erhält zunächst

$$s_{15} = \frac{1}{2r}\left[s_6\sqrt{4r^2 - s_{10}^2} - s_{10}\sqrt{4r^2 - s_6^2}\right]$$

Aufgabe. Es soll die Seite des umschriebenen Zehnecks und die des umschriebenen Fünfecks berechnet werden.

Lösung. $u_{10} = 2r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$, $u_5 = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

228. Uebungen.

1. Die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist um den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises größer als die Hypotenuse.
2. Die Diagonalen des regulären Fünfecks sind einander gleich. Zieht man alle möglichen, so ist jeder Polygonswinkel in 3 gleiche Theile getheilt; die 5 Schnittpunkte der Diagonalen sind die Ecken eines regulären Fünfecks.
3. In jedem Sehnensechsecke liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten (der 1ten u. 4ten, 2ten u. 5ten, 3ten u. 6ten) in gerader Linie. (Pascal † 1662.)

Zum Beweise wird dreimal 199, dreimal 176, dann 177b auf das Dreieck angewendet, welches man durch Verlängerung der 1ten, 3ten, 5ten Seite erhält.

II. Abschnitt.

Flächeninhalt eingeschriebener und umschriebener Polygone.

229. Fläche des Dreiecks.

Dreieck. a) Die Fläche F des in den Kreis vom Radius r eingeschriebenen Dreiecks ABC ist

$$F = \frac{abc}{4r}$$

Beweis durch 222.

Zusatz. Durch Vermittelung von 161 läßt sich r in den drei Seiten des Dreiecks ausdrücken

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

b) Die Fläche Q des um den Kreis vom Radius ϱ beschriebenen Dreiecks ABC ist

$$Q = \frac{\varrho}{2}(a + b + c),$$

daher $$\varrho = \frac{1}{s}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

c) Die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der Kreise, welche dem Dreiecke ABC so angeschrieben sind, daß sie beziehungsweise die Seiten a, b, c berühren, sind

$$\varrho_a = \frac{1}{s-a}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

$$\varrho_b = \frac{1}{s-b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

$$\varrho_c = \frac{1}{s-c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

Ableitung. Der Inhalt des Vierecks, dessen vier Ecken A, B, C und der Mittelpunkt des angeschriebenen Kreises sind, wird durch ϱ_a... und die Seiten ausgedrückt, dann 161 angewendet.

Zusatz 1. Die Entfernungen der 12 Berührungspunkte von den Ecken sind durch die Strecken (s − a), (s − b), (s − c) gegeben.

Zusatz 2. $F = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}$.

230. Fläche des Sehnenvierecks.

Da die Diagonale f nach 224 Z. durch die vier Seiten ausgedrückt werden kann, so läßt sich nach 161 jedes der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch f zerlegt wird, durch die Seiten ausdrücken. Durch Addition erhält man die Fläche des Vierecks. Sehnenviereck.

Es ist nach 161 (erste Formel):

$$(4F_1)^2 = (2ad)^2 - (a^2 + d^2 - f^2)$$
$$(4F_2)^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - f^2)$$

Da nun der Werth von f^2 unverändert bleibt, wenn man

durchaus zugleich a mit b, d mit c vertauscht, andererseits aber durch diese Vertauschung $(4F_1)^2$ in $(4F_2)^2$ übergeht, so kann man sich zunächst auf die Behandlung von F_1 beschränken und durch schließliche Vertauschung der Seiten F_2 ableiten.

$$(4F_1)^2 = (2ad)^2 - \left[ad\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}\right]^2$$

$$(4F_1)^2 = \left(\frac{ad}{ad+bc}\right)^2\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right]$$

$$F_1 = \frac{ad}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

worin $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ bedeutet.

$$F_2 = \frac{bc}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

$$F = F_1 + F_2 = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Verhältniß der Flächen.

231. Verhältniß der Flächen regulärer Polygone.

a) Die Flächen regulärer n=Ecke verhalten sich wie die Radienquadrate *) der ihnen umschriebenen und wie die Radienquadrate der ihnen eingeschriebenen Kreise.

Bezeichnet man mit F_n, F'_n die Flächen der regulären n=Ecke, welche Kreisen von den Radien r, r^1 eingeschrieben sind, mit Q_n, Q'_n die Flächen der umschriebenen n=Ecke, so ist

Behauptung. $F_n : F'_n = r^2 : r'^2$

$Q_n : Q'_n = r^2 : r'^2$. 181. 196.

b) Denkt man sich um und in einen Kreis vom Radius r ein reguläres n=Eck beschrieben, so ist $Q_n : F_n = u_n^2 : s_n^2$, daher verhalten sich die beiden Flächen (nach 189) auch wie das Quadrat des Radius zum Quadrate des Apothema, oder nach 225 a

$$Q_n : F_n = 1 : \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2\right].$$

Da (nach 226) $s_n = 2rs'_n$, wenn man mit s'_n die Seite des regulären n=Eckes bezeichnet, welches dem Kreise vom Durchmesser 1 eingeschrieben ist, so folgt

*) Mit Rücksicht auf die Regel, welche die deutsche Sprache ausnahmelos bei Bildung zusammengesetzter Wörter befolgt, dürfte diese Bildung der mit gleicher Bedeutung versuchten Zusammensetzung „Quadratradien" vorzuziehen sein.

$$Q_n : F_n = 1 : \left[1 - (s'_n)^2\right].$$

Das Verhältniß der Fläche des einem beliebigen Kreise umschriebenen n-Eckes zu der Fläche des eingeschriebenen n-Eckes ist nur von der Seitenzahl n abhängig.

232. Maß der Flächen regulärer Polygone. Maß der Flächen

a) Die Fläche Q_n des umschriebenen regulären n-Ecks ist dem halben Produkte aus dem Radius in den Umfang gleich.

$$Q_n = \frac{1}{2} r Y_n.$$

Zusatz 1. Man erhält die Fläche des dem Kreise vom Radius r umschriebenen n-Ecks, wenn man den Umfang Y'_n des dem Kreise vom Durchmesser 1 umschriebenen n-Eckes mit dem Quadrate des Radius multiplicirt.

$$Q_n = r^2 Y'_n \,{}^{*)} \quad [\text{Nach 226 ist } Y_n = 2rY'_n]$$

Zusatz 2. Für die Fläche des regulären n-Ecks, welches dem Kreise vom Durchmesser 1 umschrieben ist, gilt

$$4Q'_n = Y'_n$$

d. h. die Maßzahl des umschriebenen Perimeters ist viermal so groß als die Maßzahl der Fläche.

b) Die Fläche F_n des eingeschriebenen regulären n-Ecks ist dem halben Produkte aus dem Apothema in den Umfang gleich

$$F_n = \frac{1}{2} r\Sigma_n \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}.$$

Zusatz. Bezeichnet Σ'_n den Umfang, s'_n die Seitenlänge des dem Kreise vom Durchmesser 1 eingeschriebenen n-Ecks, so ist

$$F_n = r^2 \Sigma'_n \sqrt{1 - (s'_n)^2}.$$

c) Als Beziehungen zwischen den Flächen der regulären n-Ecke und 2n-Ecke leitet man mit Hilfe von 225 Z. und des Vorstehenden folgende nützliche Gleichungen ab: Beziehungen zwischen den Flächen regul. Polygone.

$$Q_{2n} = Q_n \frac{Y_{2n}}{Y_n}, \quad F_{2n} = F_n \frac{Y_n}{\Sigma_n};$$

$$F^2_{2n} = F_n \cdot Q_n, \quad Q_{2n} = \frac{2F_nQ_n}{F_n + F_{2n}},$$

---

*) Man beachte die Bedeutung von Y'_n und der folgenden Σ'_n und s'_n als Coefficienten der Längeneinheit.

von welchen die letzten sich auch direct geometrisch nachweisen lassen. Vgl. Legendre El. d. G. übers. von Crelle Buch IV, Satz 13.

Besondere Flächen.

233. Inhalt einiger regulären Polygone.

a) Es ist für das reguläre Dreieck

$$F_3 = \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}, \quad Q_3 = 3r^2\sqrt{3};$$

b) für das reguläre Viereck

$$F_4 = 2r^2, \quad Q_4 = 4r^2;$$

c) für das reguläre Sechseck

$$F_6 = \frac{3}{2} r^2\sqrt{3}, \quad Q_6 = 2r^2\sqrt{3}.$$

Anmerkung. Man kann zur Uebung die in 232 aufgestellten Sätze und Beziehungen an diesen Flächen nachweisen und mit Hilfe derselben und 227 weitere reguläre Polygone berechnen.

III. Abschnitt.

Cyclometrie.

Vergleichung zwischen dem Umfange der eingeschriebenen und umschriebenen Polygone einerseits und der Peripherie andererseits.

234. Lehrsätze.

Die Peripherie liegt zwischen den beiden Perimetern.

a) Der Perimeter eines eingeschriebenen Polygons ist kleiner als die Peripherie. 15.

b) Der Unterschied zwischen der Peripherie (P) und dem Perimeter (Σ) eines eingeschriebenen Polygons läßt sich kleiner machen, als jede noch so kleine Größe.

Beweis. Da $\Sigma_{2n} > \Sigma_n$, $\Sigma_{4n} > \Sigma_{2n} \ldots$ so kann man durch Vermehrung der Seitenzahl die Differenz $P - \Sigma$ immer mehr vermindern. Könnte nun dennoch diese Differenz nie kleiner als eine bestimmte Länge d werden, so daß $P - d$ der größte durch eingeschriebene Polygone erreichbare Perimeter wäre, so sei $\Sigma_{2kn} = P - d$ dieser größtmögliche Perimeter und gehöre einem 2kn-Ecke an. Construirte man nun nach 220 c, so erhielte man ein eingeschriebenes 4kn-Eck, dessen Umfang $\Sigma_{4kn} > \Sigma_{2kn}$ wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann somit keine

von Σ nicht überschreitbare Grenze von der Größe $P - d$ geben.*)

c) Der Perimeter Y eines umschriebenen Polygons ist größer als die Peripherie.

Beweis. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte $Y = P$ oder $Y < P$ sein. Wäre $Y = P$, so könnte man immer durch Ziehen einer Tangente an einen zwischenliegenden Punkt ein umschriebenes Polygon $Y' < Y$ herstellen, welches demnach auch kleiner als P sein müßte. Es ist also nur zu zeigen, daß ein umschriebenes Polygon nicht kleiner sein kann, als die Peripherie.

Wäre $Y < P$, also $P - Y = d$, so ließe sich nach b) ein eingeschriebenes Polygon Σ von soviel Seiten construiren, daß $P - \Sigma < d$ wäre. Nun hätte man

$$\begin{array}{c} P - Y = d \\ P - \Sigma < d \\ \hline \Sigma > Y \end{array}$$

im Widerspruche mit 88c.

Zusatz. Da $Y_n > P > \Sigma_n$, so ist der Unterschied zwischen dem Umfange des umschriebenen und eingeschriebenen n-Eckes größer als der Unterschied zwischen einem dieser Perimeter und der Peripherie.

235.

Berechnung der Peripherie vom Durchmesser Eins.

Es ist ein Kreis vom Durchmesser Eins gegeben, man soll die Länge seiner Peripherie ermitteln. Die Ludolphische Zahl.

Es ist bisher nicht gelungen, die Maßzahl dieser Peripherie in geschlossener Form, d. h. als endliche Zahl oder als (rationales oder irrationales) Resultat einer endlichen Zahlenverbindung (Wurzel, Logarithmus...) darzustellen. Man besitzt indessen ein sicheres Verfahren, diese Zahl mit jeder beliebigen Annäherung zu berechnen. Dieses Verfahren besteht darin, daß man

*) Vgl. Legendre a. a. O. Buch IV, Satz 9. Der Sinn des Beweises läßt sich kurz so fassen: Der eingeschriebene Perimeter nähert sich einer Grenze. Diese kann weder eine gebrochene sein, noch eine vom Kreise verschiedene Curve, weil letztere beliebig viele Punkte mit der Peripherie gemein haben müßte. Ueber den Sinn und Werth des Ausdruckes: „Der Kreis ist ein Polygon von unendlich vielen Seiten" vgl. die Bemerkung von Crelle a. a. O. S. 122.

den Umfang sowohl des eingeschriebenen als des umschriebenen n-Eckes für ein so großes n berechnet, daß der Unterschied beider Perimeter nicht größer ist, als die in einem vorliegenden Falle noch zulässige Abweichung der als Länge der Peripherie benützten Zahl von der wahren Länge. Ist es z. B. in einem besonderen Falle erforderlich, die Peripherie bis auf die 6. Decimale genau zu kennen, so hat man die Perimeter Σ'_n und Y'_n für ein so großes n zu berechnen, daß $Y'_n - \Sigma'_n \leqq \frac{5}{10^7}$. Dann ist, wenn man die wirkliche Länge der Peripherie mit π bezeichnet, nach 234 Z.

$$\pi - \Sigma'_n < \frac{5}{10^7};$$

somit wird die für diesen Fall erforderliche Genauigkeit erreicht, wenn man statt des unbekannten π das berechnete Y'_n oder Σ'_n in Rechnung bringt.

Man hat nun, um für jeden möglichen Fall einen genäherten Werth von π von der gewünschten Genauigkeit bereit zu haben, ein für allemal die Perimeter Σ'_n und Y'_n für sehr große n berechnet und findet, wenn man vom Sechsecke ausgeht:

n	Σ'_n	Y'_n
6	3,0000	3,4641
12	3,1058	3,2154
24	3,1326	3,1597
48	3,1394	3,1461
96	3,1410	3,1427

Somit ist π um weniger als 0,0017 von Σ'_{96} verschieden. Ludolph van Ceulen (1596) hat zuerst die Rechnung soweit fortgesetzt, bis Σ'_n und Y'_n in den ersten 35 Decimalstellen übereinstimmten. Man kennt also seit dieser Zeit die Zahl π auf 35 Decimalen genau und nennt sie nach ihrem Berechner die Ludolphische Zahl.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288 \pm \delta\text{*)}$$

wobei $\delta < \frac{5}{10^{36}}$ ist.

*) π ist später ohne Nutzen bis auf 140 Stellen genau berechnet worden.

Anmerkung. Schon Archimedes fand durch Vergleichung der 96-Ecke $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$. Der Archimedische Näherungswerth $\frac{22}{7}$ [$= 3,1428\ldots$] reicht für diejenigen Rechnungen aus in welchen es auf eine Einheit der 3. Decimale von π nicht ankommt. Metius, ein Zeitgenosse Ludolph van Ceulens, gab für π den Näherungswerth $\frac{355}{113}$[$=3,1415929\ldots$] der auf 6 Decimalen genau ist.

236. Lehrsatz.

Bezeichnet P die Länge der Peripherie vom Durchmesser 2r, während π die Peripherie vom Durchmesser 1 ist, so ist Die Peripherie zum Radius r.

$$P = 2r\pi.$$

Beweis. Wäre $\frac{P}{2r}$ nicht gleich π, so müßte es entweder $\pi + \delta$ oder $\pi - \delta$ sein, wobei δ irgend eine Zahl bezeichnet.

Wäre nun

$$\frac{P}{2r} = \pi + \delta$$

so könnte man n so groß nehmen, daß

$$Y'_n - \pi < \delta,$$
$$Y'_n < \pi + \delta,$$
$$Y'_n < \frac{P}{2r},$$
$$2r\,Y'_n < P$$

wird. Nun ist (nach 226) $2r\,Y'_n$ der Perimeter des dem Kreise vom Radius r umschriebenen n-Eckes, daher ist die Schlußgleichung nach 234 c unmöglich. Aehnlich beweist man durch Vergleichung mit dem eingeschriebenen Polygone, daß $\frac{P}{2r} = \pi - \delta$ unmöglich ist.

237. Lehrsätze.

a) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien. Verhältniß der Bögen von verschiedenen Radien.

b) Der Bogen a_1 von n Graden hat im Kreise vom Radius r_1 die Länge

$$a_1 = \frac{n}{180}\,r_1\,\pi \ (106),$$

Der Bogen a_2 von n Graden im Kreise vom Radius r_2 ist

$$a_2 = \frac{n}{180} r_2 \pi ,$$

woraus $$a_1 : a_2 = r_1 : r_2 ,$$

d. h. die in Kreisen von verschiedenen Radien zu gleichen Centriwinkeln gehörigen Bögen verhalten sich wie die Radien der Kreise.

Eben diese Bögen verhalten sich auch wie die zugehörigen Sehnen.

c) Hat in absolutem Maße ein Winkel die Größe α, d. h. ist der um seinen Scheitel mit dem Meter (als Radius) beschriebene Kreisbogen α Meter lang, so hat der mit dem Radius r beschriebene Bogen a, welcher zwischen den Schenkeln desselben Winkels liegt, die Länge

$$a = r\alpha$$

wie aus der Proportion

$$a : \alpha = r : 1 \quad \text{folgt.}$$

d) Es wurde oben (106 Zus. 2) der Winkel Eins genannt, welcher in dem mit der Längeneinheit als Radius beschriebenen Kreise zu dem Bogen von der Länge Eins als Centriwinkel gehört. Man ist nun im Stande, dieses Winkelmaß mit dem zuerst eingeführten (relativen) Maße R zu vergleichen, indem man aus

$$1 = \frac{n_1}{180} \pi$$

die Anzahl der Grade berechnet, welche dem Winkel Eins zukommen, und findet:

$$n_1 = 57^0 \ 17' \ 44{,}''8 \ .$$

Anmerkung. Da $2r\pi = 2r.3 + 2r.0{,}14159 \ldots$ und $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$, so ist mit einer für praktische Ausführungen in der Regel genügenden Annäherung

$$2r\pi = 3.2r + \frac{r\sqrt{2}}{5}$$

d. h. die Peripherie ist nahezu um den 5^{ten} Theil der Seite des eingeschriebenen Quadrates größer als der dreifache Durchmesser.

Ableitung des Ausdruckes für die Fläche des Kreises.

238. Lehrsatz.

Beliebige Annäherung der umschr. und eingeschr. Flächen.

Man kann durch Vergrößerung der Seitenzahl n bewirken, daß das Verhältniß der Fläche Q_n des umschriebenen n-Ecks

zu der Fläche F_n des eingeschriebenen n-Eckes um weniger als irgend eine noch so kleine gegebene Zahl von 1 verschieden ist.

Beweis. Nach 231 b ist

$$\frac{Q_n}{F_n} = \frac{1}{1-(s_n')^2}, \text{ somit } \frac{Q_n}{F_n} > 1$$

da $s_n' = \frac{\Sigma_n'}{n}$ und $\Sigma_n' < \pi$, so ist für $n > \pi$

$$\frac{Q_n}{F_n} < \frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Zunächst überzeugt man sich, daß $\frac{Q_n}{F_n}$ bei wachsendem n immer kleiner wird, da bei unverändertem Zähler der Nenner zunimmt. Gesetzt nun, es müßte $\frac{Q_n}{F_n}$ trotzdem immer größer als $1 + \delta$ bleiben, wobei δ irgend eine beliebig kleine bestimmte Zahl bedeutet, so wäre um so mehr für jedes noch so große n

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} > 1 + \delta,$$

daraus würde $n < \pi \sqrt{\frac{1+\delta}{\delta}}$ folgen, was der Voraussetzung, daß n beliebig groß genommen werden kann, widerspricht.

Zusatz. Da n so groß genommen werden kann, daß $\frac{Q_n}{F_n} < 1 + \delta$, so folgt $Q_n - F_n < \delta F_n$, oder da $F_n < K$ (die Fläche des Kreises), so kann man bewirken, daß

$$Q_n - F_n < \delta K,$$

d. h. man kann n so groß nehmen, daß der Unterschied zwischen der Fläche des umschriebenen und eingeschriebenen n-Eckes kleiner wird, als ein beliebig kleiner Bruchtheil der Kreisfläche.

239. Inhalt des Kreises.

Der Flächeninhalt des Kreises vom Radius r ist Fläche des Kreises.

$$K = r^2\pi.$$

Beweis. Wäre K nicht gleich $r^2\pi$, so müßte es größer oder kleiner sein als $r^2\pi$.

a) Wäre $K > r^2\pi$, also $K - r^2\pi = f$, wobei f irgend

eine Fläche vorstellen mag, so denke man sich dem Kreise ein reguläres n-Eck umschrieben und eingeschrieben von soviel Seiten, daß $Q_n - F_n < f$. Dann ist umsomehr, weil nach (9) $Q_n > K > F_n$,

$$K - F_n < f$$
$$K - F_n < K - r^2\pi$$
$$F_n > r^2\pi$$

oder, da nach 232b Z. $F_n = r^2 \Sigma'_n \sqrt{1-(s'_n)^2}$,

$$\Sigma'_n \sqrt{1-(s'_n)^2} > \pi,$$

was unmöglich ist, weil nicht der eingeschriebene Perimeter Σ'_n, und noch weniger die linke Seite der Ungleichung größer sein kann als die Peripherie.

b) Wäre $K < r^2\pi$, also $r^2\pi - K = f$, wobei f irgend eine Fläche vorstellen mag, so beschreibe in und um den Kreis vom Radius r ein n-Eck von soviel Seiten, daß $Q_n - F_n < f$, dann wird um so mehr $Q_n - K < f$,

somit $Q_n - K < r^2\pi - K$,

$$Q_n < r^2\pi,$$

oder da nach 232a Z. 1 $Q_n = r^2 Y'_n$

$$Y'_n < \pi.$$

was unmöglich ist, weil Y'_n als Perimeter des umschriebenen n-Eckes nicht kleiner sein kann, als die (zum Durchmesser 1 gehörige) Peripherie.

Anmerkung. Zur Uebung kann man versuchen, den Beweis zu a) mittelst des dem Kreise vom Durchmesser 1 umschriebenen Polygons zu führen.

Zusatz 1. Die Fläche des Kreises ist einem Dreiecke gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Zusatz 2. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

240. Inhalt von Theilen des Kreises.

Fläche des Sectors.

a) Die Fläche des Sectors, dessen Centriwinkel n Grade hat, ist

$$\text{Sector} = \frac{n}{360} r^2\pi.$$

Hat der Bogen, welcher den Sector begrenzt, die Länge a, so ist der Inhalt

$$\text{Sector} = \frac{1}{2} ar,$$

d. h. der Sector ist einem Dreiecke gleich, welches den Bogen zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Der Beweis ergibt sich aus der Bemerkung, daß die Sectoren gleicher Kreise sich wie die Centriwinkel verhalten (105).

b) Das Segment, dessen Bogen n Grade hat, ist zwar durch diese Angabe und den Radius vollkommen bestimmt, ebenso durch die Länge der Sehne und den Radius, nichts desto weniger reichen die bisherigen Mittel zur Berechnung des allgemeinen Falles nicht aus.

Beispiele. Das Segment zu berechnen, dessen Bogen 180^0, 90^0, 60^0, 45^0, 30^0, $22\frac{1}{2}^0$, 36^0, 18^0, 24^0 hat, wenn der Radius r ist.

Für welche Bögen läßt sich das Segment berechnen?

c) Der von den Peripherien zweier concentrischen Kreise mit den Radien $r_1 > r_2$ begrenzte Ring hat die Fläche

$$\pi(r_1^2 - r_2^2) = \frac{2r_1\pi + 2r_2\pi}{2}(r_1 - r_2),$$

er ist also einem Trapeze gleich, welches die beiden Peripherien zu parallelen Seiten und die Differenz der Radien zur Höhe hat.

Derselbe Ring hat die Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser Tangente an den inneren und Sehne des äußeren Kreises ist.

241. Uebungen.

1) Die Centrale zweier gleichen Kreise ist dem Radius r gleich. Man soll den gemeinschaftlichen Theil beider Kreisflächen berechnen.

2) Beschreibt man um ein rechtwinkliges Dreieck den Halbkreis, ferner die Halbkreise über jeder Kathete (auswärts), so entstehen zwei von Kreisbögen begrenzte halbmondförmige Flächen*) deren Inhalt dem Inhalte des Dreiecks gleich ist.

3) Beschreibt man den Kreis um ein Quadrat, und errichtet über jeder Seite des Quadrats den Halbkreis nach innen, so erhält man eine vierblättrige von Kreisbögen begrenzte Figur, deren Inhalt den vier äußeren Segmenten gleich ist.

4) Theilt man den Durchmesser des Halbkreises in innere Abschnitte und errichtet über jedem Abschnitte den Halbkreis, so ist die Differenz zwischen der Fläche des gegebenen Halbkreises und der Summe der neu construirten dem Kreise gleich, welcher die im Theilpunkte errichtete Senkrechte zum Durchmesser hat.

*) Die lunulae des Hyppokrates von Chios, 400 v. Chr.

Anhang III.

Beziehungen zwischen Umfang und Inhalt der Figuren.

(Isoperimetrische Sätze.)

Erklärung. Isoperimetrisch heißen zwei Figuren von gleichem Umfange.

242. Lehrsatz.

Von zwei Dreiecken, welche gleiche Grundlinie und gleichen Inhalt haben, hat dasjenige den größeren Umfang, welches den größten Winkel an der Grundlinie hat.

Voraussetzung. Die beiden Dreiecke seien $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$, ihr Inhalt $J_1 = J_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $\sphericalangle C_2 > C_1 > B_1$

Behauptung. $A_1B_1 + A_1C_1 < A_2B_2 + A_2C_2$.

Beweis. Man lege die Dreiecke mit der Grundlinie so auf einander, daß der größere Basiswinkel C_1 einen Theil von C_2 bildet; ziehe die (zur Basis parallele) Verbindungslinie der Spitzen A_1 und A_2, verlängere B_1A_1 um A_1C_1 (bis D_1) und verbinde D_1 mit A_2, so ist nach 57a und wegen $C_1 > B_1$

$$D_1A_2 < C_2A_2.$$

Durch 15 und Substitution folgt die Behauptung.

243. Lehrsatz.

Von zwei isoperimetrischen Dreiecken ($\triangle_1$ und $\triangle_2$), welche gleiche Grundlinie haben, hat dasjenige ($\triangle_2$) die kleinere Fläche, welches den größten Winkel (C_2) an der Basis hat.

Beweis. Ein drittes Dreieck ($\triangle_3$) von derselben Basis soll mit $\triangle_1$ gleichen Inhalt und den Basiswinkel C_2 haben, so ist, wenn mit Y die Umfänge bezeichnet werden, nach 242 $Y_3 > Y_1$; also auch $Y_3 > Y_2$, demnach $C_3 A_3 + B_3 A_3 > C_2 A_2 + B_2 A_2$. Da nun A_2 in der Richtung $C_3 A_3$ liegt, so würde jede andere Annahme als $C_2 A_2 < C_3 A_3$ gegen diese Ungleichung verstoßen (15). Daher $\triangle_3 > \triangle_2$ und somit $\triangle_1 > \triangle_2$.*)

244. Lehrsätze.

a) Unter allen Dreiecken, welche eine Seite und den Inhalt gleich haben, hat dasjenige den kleinsten Umfang, in welchen die beiden anderen Seiten gleich lang sind. C 391. 242.

b) Unter allen isoperimetrischen Dreiecken, welche eine Seite

*) Vgl. Baltzer El. d. M. II S. 138 d. 2. Aufl. Durch die hier gegebene Anordnung 242, 243 dürfte der Beweis dieser fundamentalen Sätze sich etwas vereinfacht haben.

gleich haben, hat das über dieser Seite gleichschenklige den größten Inhalt. 39 α. 243.

245. Lehrsätze.

a) Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel und die Summe der ihn einschließenden Seiten gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten einander gleich sind.

Beweis. Zwei solche Dreiecke verhalten sich wie die Produkte der einschließenden Seiten. Es muß also dasjenige Dreieck das größte sein, in welchem dieses Produkt den größten Werth erhält, während die Summe constant bleibt.

Der Fall läßt sich allgemeiner erledigen durch Beantwortung der Frage: Für welche Werthe von x und y hat xy den größten Werth, wenn $x + y = a$ ist?

Setzt man $x = \frac{a}{2} + \delta$, so wird $y = \frac{a}{2} - \delta$, und

$$xy = \left(\frac{a}{2} + \delta\right)\left(\frac{a}{2} - \delta\right) = \frac{a^2}{4} - \delta^2,$$ was offenbar am größten wird, wenn der Subtrahend Null, d. h. $x = y = \frac{a}{2}$ wird.

Zusatz. Unter den isoperimetrischen Kreissectoren hat derjenige die größte Fläche, dessen Bogen dem Durchmesser gleich ist.

Beweis. Der Inhalt J des Sectors vom Bogen a und Radius r ist $\frac{1}{2}ar$ (240), der Umfang $Y = a + 2r$. Soll $\frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}a + r$ constant bleiben und $\frac{1}{2}a \cdot r$ ein Maximum werden, so muß $\frac{1}{2}a = r$, $a = 2r$ sein.

Aufgabe. Man soll (mit Annäherung) unter Anwendung des Gradbogens den größten Sector construiren, welcher eine gegebene Strecke b zum Umfange hat, und das ihm inhaltsgleiche Quadrat herstellen.

b) Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel und die ihm gegenüberliegende Seite gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem die beiden anderen Seiten gleich lang sind. 243. Auch durch Benützung von C 29.

246. Lehrsätze.

a) Unter allen Dreiecken, welche zwei Seiten einzeln gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten einen rechten Winkel einschließen.

Beweis. Das behauptete Dreieck hat die größte Höhe, wie sich zeigt, wenn man mit der einen Seite um den Scheitel einen Kreis beschreibt.

b) Unter allen Dreiecken, welche die Summe zweier Seiten gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten gleich sind und einen rechten Winkel einschließen.

Der Beweis wird durch Vermittlung eines gleichschenkligen, welches auf gleicher Basis mit dem allgemeinen steht, auf a) zurückgeführt.

247. Lehrsatz.

Unter allen isoperimetrischen Dreiecken hat das gleichseitige den größten Inhalt.

Beweis. Bezeichnet man mit σ den (constanten) Umfang, mit a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, so ist der Inhalt

$$\frac{1}{4}\sqrt{\sigma(\sigma - 2a)(\sigma - 2b)(\sigma - 2c)},$$

und dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn

$$(\sigma - 2a)(\sigma - 2b)(\sigma - 2c)$$

den größten Werth erhält, weil das Uebrige unveränderlich ist und die Wurzel mit dem Radikanden stetig wächst und abnimmt.

Durch Entwicklung wird der Ausdruck

$$-\sigma^3 + \sigma(ab + ac + bc) - 2abc;$$

so daß man die weitere Betrachtung auf

$$\sigma(ab + ac + bc) - 2abc \;\ldots.\; (1$$

beschränken kann. Daraus wird durch die Substitution

$$c = \sigma - (a + b)$$

$$(a + b)\sigma^2 - (a + b)^2\sigma - ab\sigma + 2ab(a + b) \;\ldots.\; (2$$

Setzt man darin $b = a$, so erhält man

$$2a\sigma^2 - 5a^2\sigma + 4a^3; \;\ldots.\; (3$$

Setzt man hingegen $b = a + \delta$, und subtrahirt von dem dadurch erhaltenen Ausdruck den vorigen, so bleibt als Differenz

$$\delta(\sigma^2 - 5a\sigma + 6a^2) - \delta^2(\sigma - 2a) \;\ldots.\; (4$$

Soll (3 ein Maximum sein, so muß diese Differenz (4) sowohl für positive als für negative δ negativ sein, da jede Abweichung des b vom Werthe a eine Abnahme des Werthes von (2 zur Folge haben soll. Dieses ist aber nur dann allgemein der Fall, wenn die erste Potenz von δ in der Differenz nicht vorkommt, wenn also

$$\sigma^2 - 5a\sigma + 6a^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich als Bedingung für das Maximum:

$$a = \frac{\sigma}{3},$$

was der Behauptung entspricht.*)

248. Lehrsätze.

a) Unter allen Parallelogrammen, welche zwei anliegende Seiten gleich haben, hat das Rechteck den größten Inhalt. 246a.

b) Unter allen isoperimetrischen Parallelogrammen hat das Quadrat den größten Inhalt. 246b.

249. Lehrsatz.

Unter allen isoperimetrischen Vierecken hat das Quadrat den größten Inhalt.

Beweis. Das größte Viereck muß gleichseitig sein; denn wären zwei anliegende Seiten ungleich, so könnte man das von ihnen und der Diagonale gebildete Dreieck durch Gleichmachen der beiden Seiten (nach 244b) vergrößern, somit auch das Viereck. Unter den gleichseitigen isoperimetrischen Vierecken ist aber nach 248 das Quadrat das größte.

250. Lehrsatz.

Das größte n-Eck von gegebenem Umfange ist gleichseitig.

Beweis. Ist Q das größte n-Eck vom Umfange Y, so können zwei anliegende Seiten desselben nicht ungleich sein, weil man sonst durch Verwandlung des Dreiecks, welches diese beiden Seiten in Verbindung mit der Diagonale begrenzen, in ein gleichschenkliges des Polygon Q ohne Aenderung seines Umfanges vergrößern könnte, gegen die Voraussetzung.

Umkehrung? Da nur ein einziges gleichseitiges Dreieck von gegebenem Umfange möglich ist, so liegt auch hierin ein Beweis für 247.

251. Aufgabe.

Es sind (n—1) Seiten eines n-Ecks gegeben; man soll diese so zusammenstellen und die n^{te} Seite (x) so wählen, daß das Polygon die größtmögliche Fläche erhält.

Lösung. Das größte n-Eck entsteht, wenn man über die Winkel und die n^{te} Seite so verfügt, daß letztere den Durchmesser des Halbkreises bildet, in welchen das Polygon eingeschrieben ist.

---

*) Einen rein geometr. Beweis gibt nach Steiner Baltzer a. a. O. S. 139.

Beweis.*) Zunächst kann man sich klar machen, daß die n^{te} Seite für den Fall des Maximums einen Werth zwischen Null und der Summe der (n—1) Seiten haben muß.

Ferner folgt, daß im größten Polygone jeder Winkel, den die beiden von den Endpunkten der n^{ten} Seite an ein Eck gezogenen Diagonalen mit einander bilden, ein rechter sein muß, weil man sonst unter Beibehaltung der (n—1) Seiten und des übrigen Inhaltes das Polygon dadurch vergrößern könnte, daß man den fraglichen Winkel zum rechten macht. (Durch Drehung des von der einen Diagonale abgeschnittenen Theiles der Figur.)

Folglich liegen die Ecken des größten Polygons in dem über x beschriebenen Halbkreisbogen.

Demgemäß kann ein Polygon, welches die (n — 1) gegebenen Seiten hat, nur dann größer sein als alle unter derselben Bedingung möglichen, wenn es in den Halbkreis eingeschrieben ist, d. h. es ist das größtmögliche der in Rede stehenden nur noch unter denjenigen Polygonen zu suchen, welche in den Halbkreis eingeschrieben sind.

Es gibt aber nur einen einzigen Halbkreis, in welchem ein n=Eck von gegebenen (n—1) Seiten so eingeschrieben werden kann, daß die n^{te} Seite den Durchmesser bildet. Denn ist r der Radius dieses Halbkreises, r' der Radius eines zweiten von der verlangten Größe, so müßte r' $\gtrless$ r sein. In einem solchen Kreise wäre aber die Summe der Centriwinkel, welche den gegebenen Seiten gegenüberliegen $\lessgtr$ 2R (vgl. 57c,d,e).

Die in diesen Halbkreis eingeschriebenen Polygone haben alle die gleiche Größe (die Vertauschung der gegebenen Seiten ändert daran nichts).

Da somit das größte nothwendig unter den eingeschriebenen ist, diese aber alle einander gleich sind, so ist jedes derselben größer als alle übrigen nicht eingeschriebenen.

252. Lehrsatz.

Von allen n=Ecken mit gegebenen Seiten ist das größte dasjenige, dessen Ecken in einer Kreislinie liegen.

Beweis. Man vergleicht ein eingeschriebenes n=Eck (P) mit einem anderen (Q) von gleichen Seiten, dessen Ecken nicht alle zugleich in einer Kreislinie liegen können. Zunächst ist klar, daß sich die Größe von P nicht ändert, wenn man die Seiten vertauscht, und man ordnet sie deßhalb so, daß sie den Seiten in Q der Ordnung nach gleich sind. Um 251 an=

*) Vgl. Legendre El. d. Geom. Anhang zum 4ten Buche. Satz 4 und 5.

wenden zu können, zieht man in P durch ein Eck (A) den Durchmesser, und verbindet dessen anderen Endpunkt (B) mit den beiden Endpunkten der etwa durchschnittenen Seite. An Q setzt man auf der gleichen Seite ein Dreieck ($\triangle$) an, welches dem eben construirten congruent ist und zieht dann die dem Durchmesser AB analoge Strecke A'B'. AB und A'B' theilen die beiden $(n+1)$-Ecke in je zwei Theile P_1, P_2 und Q_1, Q_2, welche alle Seiten bis auf eine beziehungsweise gleich haben, somit ist $P_1 > Q_1$, wenn nicht etwa alle Ecken von Q_1 im Halbkreise über A'B' liegen, was möglich wäre. Ebenso $P_2 > Q_2$, wenn nicht alle Ecken von Q_2 im Halbkreise über A'B' liegen. Somit $P_1 + P_2 > Q_1 + Q_2$, wenn nicht alle Ecken von Q_1 und Q_2 zugleich im Kreise liegen, was gegen die Voraussetzung wäre. Somit ist $P_1 + P_2 > Q_1 + Q_2$, d. h. $P + \triangle > Q + \triangle$, und $P > Q$.

253. Lehrsatz.

Unter allen isoperimetrischen n-Ecken ist das reguläre das größte.

Beweis. Nach 250 ist das größte n-Eck gleichseitig, nach 252 muß es in den Kreis eingeschrieben werden können. Diese beiden Bedingungen zugleich erfüllt nur das reguläre.

Zusatz. Das reguläre n-Eck hat einen kleineren Umfang als das irreguläre von gleichem Inhalte.

Beweis. Man denke sich ein dem irregulären ähnliches n-Eck vom Umfange des regulären und wende den Lehrsatz und 196, 195 an.

254. Lehrsatz.

Das reguläre $(n+1)$-Eck ist größer als das reguläre n-Eck von gleichem Umfange.

Beweis. Das reguläre n-Eck kann als irreguläres $(n+1)$-Eck mit einem gestreckten Winkel angesehen werden; das irreguläre $(n+1)$-Eck ist aber kleiner als das isoperimetrische reguläre (253).

Somit bilden die Flächen der isoperimetrischen regulären Polygone vom Dreiecke an bis zum n-Ecke hinauf eine steigende Reihe.

Zusatz. Das reguläre $(n+1)$-Eck hat einen kleineren Umfang als das reguläre n-Eck von gleichem Inhalte.

Beweis. Sei J der Inhalt, Σ_{n+1} der eine, Σ_n der andere Umfang, so ist die Behauptung: $\Sigma_{n+1} < \Sigma_n$. Denkt man sich ein reguläres n-Eck F vom Umfange Σ_{n+1}, so ist $F < J$ (Lehrs.), da nun $F : J = (\Sigma_{n+1})^2 : (\Sigma_n)^2$, so ist $\Sigma_{n+1} < \Sigma_n$.

Somit bilden die Perimeter gleichflächiger regulärer Polygone vom Dreiecke an bis zum n-Ecke eine fallende Reihe.

255. Lehrsatz.

Der Kreis ist größer als jedes n-Eck von gleichem Umfange.

Beweis. Es habe ein reguläres Polygon (n-Eck) den Umfang $2r\pi$ eines Kreises vom Radius r.

Schreibt man diesem Polygone einen Kreis ein, so hat dieser einen Radius $\varrho < r$, weil (nach 234) $2\varrho\pi < 2r\pi$. Setzt man demnach $\varrho = r - d$, so ist der Inhalt des Polygons nach 232

$$Q = \frac{1}{2}(r - d)\, 2r\pi$$

$$Q = r^2\pi - dr\pi$$

somit kleiner als der Inhalt $r^2\pi$ des Kreises von gleichem Umfange. Umsomehr ist der Inhalt des isoperimetrischen irregulären n-Ecks kleiner als der des Kreises.

Zusatz. Der Kreis hat einen kleineren Umfang als ein n-Eck von gleichem Inhalte.

Beweis wie in 254 Z.

256. Lehrsatz.*)

Unter allen isoperimetrischen Figuren hat der Kreis die größte Fläche.

Beweis. Zunächst kann man sich klar machen, daß eine Figur von gegebenem Umfange nicht beliebig groß sein kann. Da ihr Inhalt Null wird, wenn man die Transversale, welche den Umfang halbirt, bis zur halben Länge des Perimeters vergrößert, und andererseits der Inhalt ohne Aenderung des Umfanges vergrößert werden könnte, wenn die Transversale Null wäre, so muß sie ihren größten Inhalt für einen zwischen 0 und der Hälfte des Perimeters liegenden Werth der Transversale haben.

Die größte Figur kann nirgends convex nach innen sein, weil man eine solche Figur durch Ausbiegung des convexen Theiles ohne Aenderung des Umfanges vergrößern könnte.

Ferner muß in der größten Figur die Transversale, welche den Umfang halbirt, auch die Fläche halbiren, weil man sonst (durch Umschlagen des größeren Theiles um die Transversale) eine größere Figur von gleichem Umfange herstellen könnte.

In der Hälfte der größten Figur muß ferner jeder Punkt

*) Im Wesentlichen nach dem von Baltzer a. a. O. S. 140 Mitgetheilten.

des Umfangs so liegen, daß die nach ihm von den Endpunkten der Transversale aus gezogenen Strecken einen rechten Winkel mit einander bilden, sonst könnte man diese Hälfte unter Beibehaltung ihres Antheils am Umfange vergrößern, indem man den rechten Winkel herstellt. Vgl. 251.

Diesen Bedingungen genügt nur der Kreis. (108 Zus. 4), und da es nur einen Kreis von gegebenem Umfange gibt, so ist dieser die größte Figur.

Zusatz. Unter allen gleichen Figuren hat der Kreis den kleinsten Umfang.

Beweis. Ist der Kreis K der Figur L gleich, und der Kreis K' mit L von gleichem Umfange P', so ist $K' > L$ (Lehrsatz) also $K' > K$, und da der größere Kreis den größeren Umfang hat, so ist $P' > P$, also der Umfang von L größer als der des Kreises K.

Verzeichniss der citirten Sätze.

Nr.		Seite
2	Gegenstand der Geometrie	1
4	Substitution congruenter und gleicher Größen . .	4
5	Zwei Größen, die einer 3. gleich sind	4
7	Behandlung von Gleichungen	5
8	Behandlung von Ungleichungen	6
9	Das Ganze und seine Theile	6
12	Die Lage der Geraden durch 2 Punkte bestimmt . .	7
15	Die Gerade ist die kürzeste	7
16	Die Größe der Geraden durch die Endpunkte bestimmt	8
17	Vergleichung von Strecken bez. der Größe . . .	8
20	2 Gerade haben einen Punkt gem. oder keinen . .	10
21	Der Winkel als Drehungsgröße	10
22	Vergleichung von Winkeln bez. der Größe . . .	11
23	Maß (relatives) der Winkel (R)	11
24	Winkel mit gleichen Compl. oder Suppl. sind gleich .	12
26	2 Nebenwinkel sind = 2 R	12
26 Z. 1	Die äußersten Schenkel suppl. Winkel in 1 Geraden .	13
26 Z. 2	Die Winkel auf einer Seite der Geraden = 2 R .	13
26 Z. 3	Die Winkel um einen Punkt = 4 R	13
26 α	Die Halbirungslinien der Nebenwinkel stehen ⊥ . .	13
27	Scheitelwinkel sind gleich	13
28	Der Begriff „parallel"	14
30	Suppl. Gegenw. bedingen den Parallelismus . .	15
30 Z.	Gleiche Wechselw. od. corresp. bed. den Parallelismus .	16
31	Sind Gegenwinkel < 2 R, so conv. die Geraden . .	16
32	Bei Parallelen sind die Gegenwinkel = 2 R . .	17
32 Z.	„ „ „ „ Wechselw. u. d. corresp. gleich	17
33	Bei converg. Geraden sind die Gegenw. < 2 R .	17
34	Durch 1 Punkt nur eine Parallele	17
35	Eine Gerade schneidet 2 Parallele oder keine . .	17
37	Nur eine Senkrechte	18
37 β	Steht von 2 Parall. die eine ⊥, so auch die andere .	18
39	1 Seite des △ kürzer als die Summe der andern .	19
39 α	Die 2 von 1 inneren Punkte des △ ausgeh. Strecken	19
40	Der Außenwinkel des △	19
41	Die Summe der Winkel des △ = 2 R	19
41 γ	Der Winkel, dessen Scheitel innerhalb des △ liegt .	20
42	Die spitzen Winkel des rechtw. und stumpfw. △ . .	20

Nr.		Seite
43	Die Winkel a. d. Grundl. des gleichsch. △ sind gleich	20
43 Z. 2	Die Winkel des gleichsch. △ durch einen bestimmt .	20
43 Z. 3	Die Winkel a. d. Grundl. des gleichsch. △ sind spitz .	20
44	Der größeren Seite liegt d. größ. ∢ geg. . .	21
44 Z.	Der ∢, d. nicht d. größten Seite geg. liegt, ist spitz .	21
45	Aus d. Gleichheit 2 ∢ folgt Gleichheit 2 Seiten des △	21
46	Dem größeren ∢ liegt d. größere Seite geg. . .	22
46 Z. 1	Die Hypotenuse ist d. größte Seite	22
46 Z. 2	Die Senkrechte ist d. kürzeste	22
46 Z. 3	Die Kürzeste steht senkrecht	22
48	I Congruenzfall. 2 Seiten u. d. eingeschlossene ∢ .	23
49	II „ 1 Seite und 2 Winkel . . .	24
50	III „ 3 Seiten	24
51	IV „ 1 Winkel und 2 Seiten . . .	25
52 a	In congruenten Dreiecken liegen gleiche Seiten . .	26
53	Eckentransversalen des gleichsch. △	27
53 b 2	△ ist gleichsch., wenn eine Höhe d. Seite halbirt .	27
54	Die senkr. Halbirungslinie als geom. Ort . . .	29
54 Z. 1	Nur ein Punkt hat von 3 Punkten gleichen Abstand .	29
54 Z. 2	Kein Punkt hat von 3 in ger. L. l. Punkten gleichen Abst.	29
56 a	Die 3 Winkelhalbirungsl. schneid. sich in 1 Punkte .	30
56 b	Die 3 senkr. Halbirungsl. d. Seiten schn. sich in 1 Punkte	30
57 a	In 2 △△ 2 Seiten gleich, der eingeschl. Winkel ungleich	30
57 b	„ 2 „ „ „ die 3. Seite ungleich . .	31
57 c	Rechtw. △△ mit gleichen Hypot. u. ungleichen ∢ .	31
57 d	„ „ „ „ „ „ „ Katheten	31
57 e	„ „ „ „ Katheten	31
59	Summe der Viereckswinkel = 4 R	32
59 β	2 Winkel mit bez. senkrechten Schenkeln . . .	32
61 a	Die Diagonale theilt das Pllgr. in congr. △△ .	32
61 c	Im Pllgr. sind die geg. l. Seiten gleich . . .	32
61 d	Die Diagonalen des Pllgrs. halbiren sich . . .	32
61 Z. 2	Die Parallele als geom. Ort	32
62 c	Halbiren sich d. Diagonalen, so ist d. Viereck 1 Pllgr. .	33
63 a	Sind 2 Seiten des Vierecks $\overline{\parallel}$, so ist es 1 Pllgr. .	33
65	Eigenschaften des gleichseitigen Pllgrs.	34
69	„ „ rechtwinkl. „	35
70	Kennzeichen des „ „	35
72	Ein Viereck ist 1 rechtw. Pllgr., wenn	36
74 a	Das Trapez in 1 Pllgr. und Dreieck getheilt . .	36
74 b	Die Mittelinie des Trapezes	36
75	Die parallele Mittelpunkts-Transv. des △ . .	37
75 Z. 2	Theilung der Dreiecksseite in n gleiche Theile . .	38

Nr.		Seite
77 a	Die 3 Höhen schneid. sich in 1 Punkte	38
77 b	Die 3 Mittelpunktstransv. schneid. sich in 1 P. . .	38
78 1)	Die Mittelpunktstransv. des rechtw. △ . . .	39
84	I Congruenzfall der Polygone	43
85	II " " "	43
88 a	Eine Gerade, d. 1 Punkt innerhalb d. Figur hat .	44
88 b	Die Umfänge schneiden sich in 2 P.	44
88 c	Vergleichung der Umfänge 2 Polygone . . .	44
90	Construction des Kreises	45
91	Die Peripherie als geom. Ort	45
92	Der Kreis hat nur 1 Mittelpunkt	46
93	Congruenz der Kreise von gleichen Radien . . .	47
94	Congruenz gleicher Bögen	47
95	Der Kreis durch 3 Punkte der Peripherie best. . .	47
95 Z. 2	Die Gerade schn. d. Kreis in höchstens 2 Punkten .	48
96	Lage eines Punktes gegen 1 Kreis	48
98	Die Gerade trifft den Kreis nicht	49
99	Die Tangente	49
100 a	Die Tangenten von 1 P. aus sind gleich . . .	50
100 b	Tangentenviereck	50
105	Gleichen Centriw. entsp. gleiche Bögen, Sehnen ɀc. .	51
105. 7	Umfang des △, dem 1 Kreis angeschrieben . . .	53
106	Die Bögen verhalten sich wie d. Centriw. . . .	54
106 Z. 1	Gradmaß des Bogens	55
106 Z. 2	Längenmaß des Winkels	56
108	Peripheriewinkel = ½ Centriw.	57
108 Z. 1	Peripheriew. auf gleichen Bögen sind gleich . .	58
108 Z. 2	Der Peripheriew. auf d. Durchmesser = R . . .	58
108 Z. 4	Der Kreis als geom. Ort der Scheitel aller R . .	58
109	Sehnenviereck	58
110	Der Tangentialwinkel dem Peripheriew. gleich . .	58
112. 11	Der ∢ gleicher Sehnen durch d. Radius halbirt .	61
112. 12	Die Sehnen, deren ∢ d. Radius halbirt, s. gleich .	61
115	2 Kreise schn. sich in 2 Punkten	62
116	Berührung von außen	63
117	Berührung von innen	63
118	Ausgeschlossene Lage	63
119	Eingeschlossene Lage	64
120	Der Berührungspunkt auf d. Centrale	64
121	Der Berührungsp. in d. Verläng. d. Centrale . .	64
139	Parallelogramme von gl. Gr. u. Höhe sind gleich .	96
140	Dreiecke von gl. Gr. u. Höhe sind gleich . . .	96
140 Z. 2	Dreieck = ½ Pllgr. bei gl. Gr. u. Höhe . . .	96

Nr.		Seite
141	Das Trapez durch d. Höhe u. Mittelinie best. . .	97
141 Z.	Das Trapez einem Pllgr. gleich	97
143	Verhältniß der Rechtecke, d. 1 Seite gleich haben .	99
144	Rechtecke verhalten sich wie d. Produkte der Seiten .	100
145 Z.	Pllgr. von gl. Höhe verhalten sich wie d. Grundl. .	100
146	Dreiecke verh. sich wie d. Produkte d. Gr. u. Höhen. .	100
146 Z.	Dreiecke von gl. Höhe verh. sich wie die Grundl. . .	101
148 b	Dreiecke von gl. ∢ verh. sich wie die Produkte .	101
148 c	„ „ suppl. ∢ „ „ „ „ „ . .	102
149	Inhalt des Rechtecks u. Quadrats	102
149 Z. 2	Geometr. Bedeutung d. Produkte und Potenzen . .	103
150	Inhalt des Pllgrs.	103
151	Inhalt des Dreiecks	104
152	Inhalt des Trapezes	104
154	Die auf der Hypoten. senkr. Transversale . . .	105
154 Z.	Das Produkt der Katheten	106
155 a	Mittl. Prop. zu d. Abschn. d. Hypotenuse . . .	106
155 b	Die Kathete als mittl. Proportionale	106
156 .	Pythagoreischer Lehrsatz	107
158	Die Gegenseite des spitzen Winkels	109
159	Die Gegenseite des stumpfen Winkels	110
160. 3	Ausdruck der Mittelpktstransv. durch d. 3 Seiten .	111
161	Fläche des Dreiecks durch die 3 Seiten . . .	112
163 b	Umformung von Proportionen	116
163 c	Addition u. Subtr. der Glieder einer Prop. . .	117
163 d	Zusammensetzung von Proportionen	117
166 a	Proportion der vom Scheitel aus gem. Abschnitte .	120
166 b	Proportion der zwischenliegenden Abschnitte . . .	120
166 c	Proportion der parallelen Strecken	121
167 b	Prop. parall. Strecken bei mehreren Strahlen . .	121
169 a	Proportionen bedingen den Parallelismus . . .	122
169 b	„ „ „ „	122
169 c	Endpunkte prop. Parallelen liegen in 1 Geraden .	122
170	Abschnitte durch d. Winkelhalbirungstransv. . . .	123
172	Innere u. äußere Abschnitte durch d. Winkelhalb. .	123
173	Erklärung der harmonischen Theilung	123
174 a	Die Mitte der Dreiecksseite als innerer h. Theilpunkt .	124
174 b	Die Parallele zum äußeren harm. Strahle . . .	124
174 c	Stehen 2 conj. Strahlen senkrecht auf einander . .	125
175	4 harmon. Strahlen theilen jede Ger. harm. . .	125
176	Produkte der überspring. Abschn. bei einer Transv. .	125
177	3 Theilpunkte liegen in einer Geraden	126
178	Produkte der überspr. Abschn. bei 3 Transversalen .	127

Nr.		Seite
179	3 Eckentransv. schneid. sich in 1 Punkte	127
180	Das vollständige Vierseit	127
181	Begriff der Aehnlichkeit	128
184	I Aehnlichkeitsfall, 1 Winkel zw. prop. Seiten	131
185	II Aehnlichkeitsfall, 2 Winkel gleich	132
188 b	Homologe Seiten und Winkel der Dreiecke	133
189	Homologe Transversalen	133
191	Verhältniß der Flächen ähnl. Dreiecke	134
194 Z.	Verhältniß der Diagonalen ähnl. Polygone	136
195	Verhältniß der Perimeter ähnl. Polygone	136
196	„ „ Flächen ähnl. Polygone	136
199	Gleichheit der Produkte der Sehnenabschnitte	139
200 a	Die Tangente als mittl. Prop. der Sehnenabschn.	139
200 b	Die Senkr. als mittl. Prop. zu den Abschn. d. Durchm.	140
200 c	Die Sehne als mittl. Prop. zu ihrer Projection ꝛc.	140
203 a	Der äußere harm. Theilpunkt ist Schnittp. d. Tang.	141
220 c	Constr. des 2n=Ecks aus d. n=Ecke	161
222	Die Höhe d. eingeschr. △ als 4. Proportionale	162
224 a	Produkt der Diagonalen des Sehnenvierecks	162
224 Z.	Länge der Diagonalen des Sehnenvierecks	163
225 a	Die eingeschr. Seite durch die umschriebene	164
225 Z.	Beziehungen zw. den Umfängen unter sich	165
226	Proportionen zw. d. Seiten, Perimetern und Radien	165
227	Seitenlänge einiger regul. Polygone	165
231 b	Verhältniß der Flächen von d. Seitenzahl abhängig	168
232	Maß der Flächen regul. Polygone	169
232 a Z. 1	Die Fläche des Polyg. als Vielfaches d Radienquadrats	169
234 Z.	Die Peripherie liegt zwischen d. Perimetern	171
240	Inhalt des Sectors = $\frac{1}{2}$ a r	176

Citirte Constructionen.

Nr.		Seite
C 1 b	Das gleichseitige Dreieck	67
C 3	Die Senkrechte	67
C 4 3	Der supplementäre ∢ mit neuem Scheitel . . .	68
C 5	Halbiren eines Winkels	68
C 6	Antragen eines Winkels	69
C 7	Die Parallele durch 1 gegeb. Punkt	69
C 8	Theilung einer Strecke in n gleiche Theile . . .	69
C 28	Geom. Ort der Scheitel rechter Winkel	73
C 29	Geom. Ort der Scheitel eines ∢ über einer Strecke .	73
C 383	Die 4. Proportionale $\frac{a\,b}{c}$	145
C 384	Die mittlere Proportionale $\sqrt{a\,b}$	146
C 385	$\sqrt{b^2 \pm c^2}$	146
C 388	Irrationale Coefficienten $a\sqrt{b}$	147
C 391	Verlegung der Spitze durch 1 Parallele	148
C 392	Verlegung der Spitze in 1 gegeb. Punkt	148
C 393	Gegeb. Richtung d. Gegenseite d. const. Winkels . .	148
C 394	Geg. Punkt in d. Gegenseite d. const. Winkels . .	149
C 412	Goldener Schnitt	153
C 413	Theilung des △ von 1 Ecke aus	154
C 416	Theilung des Polygons von 1 Ecke aus	155
C 419	Theilung des △ durch Parallele	156

40000 · 3

34,07 Ar = 3407 □m   15000 M · 3 = 45000

400

Pag. 3, 4. fehlt. 13-[illegible].1876. FK.

Recknagel, Georg,

Ebene Geometrie für Schulen

München 1885